

Title	水輸送システムの運用に関する基礎的研究(Dissertation_全文)
Author(s)	福田, 豊生
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1985-07-23
URL	http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r5668
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	author

水輸送システムの運用に関する基礎的研究

昭和60年 3 月

福 田 豊 生

水輸送システムの運用に関する基礎的研究

昭和60年 3 月

福 田 豊 生

DOC
1985
9
電気系

序

今日、我が国の水需給の状況は、大都市への人口集中によって、水需要が増大化し偏在化する傾向と、水源がその適地の不足から山間地域へと遠隔化する傾向が顕著である。このため、総合的な水資源開発及び水資源の高度利用を実現する必要性が高まっている。良質の水を必要な時に必要なだけ、安全にかつ経済的に供給するための水輸送システムは重要な役割を担い、今後ますます大規模複雑化すると考えられる。従って、水輸送システムの解析及び運用に関する統一的な理論の発展は、水資源高度利用を実現する意味において重要な工学的課題である。

本研究は、こうした実情を踏まえて、水輸送システムの運用の高度化という立場から幾つかの課題を考究し、まとめたものである。

水輸送システムの計画及び設計において、配水管網の流量解析の問題はこれまでに多くの先覚者により研究が積み重ねられてきた。ここでは、流量解析問題を新しい視点でとらえ、回路理論及び連続写像の理論によって定式化する。これを基に、流量解析問題に対する新しい手法を提案し、例題を用いてその有効性を明らかにした。

水輸送システムでは、広域化した需要地域への水配分輸送をいかに最適化すればよいかという問題がある。数理計画法による解法に関する研究が、これまでに多く行われてきた。ここでは、計画問題を地域及び時間に関して二重に分割する新しい最適化アルゴリズムを提案し、例題を用いてその有効性を確かめた。

水輸送システムの広域化に伴い、幹線管路の管理が重要な問題となっている。ここでは、圧縮性流体としての水の波動現象に着目し、管路の状態を記述する新しい方法を提案する。これを基に実時間で管路の異常の検知を行う新しい手法を示し、シミュレーションによってその有効性を明らかにした。

謝

辞

この研究は、主として筆者が所属する三菱電機㈱中央研究所で行ったものを、京都大学工学部西川禎一教授のご指導のもとにまとめたものである。西川禎一教授、および同学部三宮信夫助教授には研究の過程で種々のご懇篤なご指導とご助言をいただいた。また、三菱電機㈱中央研究所での筆者の直接の上司であるグループマネジャー武田捷一博士、およびシステム研究部部長上村勝彦博士には、本論文を書く機会と研究環境を与えていただくとともに、研究を遂行する上で有益なご示唆とご教示をいただいた。

三菱電機㈱における諸先輩、同僚にはご厚意あふれるご激励とご援助をいただいた。特に、本社取締役技術本部長 馬場準一博士には、終始ご厚意あふれるご激励をいただいた。また、制御製作所 中堀一郎博士には、筆者が水輸送システムの研究を始める端緒を与えていただいた。

以上の方々に対し衷心より感謝の意を表します。

目 次

第 1 章 序 論	1
1.1 本研究の背景	1
1.2 本論文の内容概説	1
第 2 章 水輸送システムのモデル	4
2.1 水輸送システムの問題分析	4
2.2 モデルの分類	8
2.2.1 圧縮性流体モデル	8
2.2.2 非圧縮性流体モデル	13
2.2.3 ネットワークモデル	16
2.2.4 地域水輸送モデル	17
第 3 章 連続写像法による配水管網の解析	19
3.1 序 言	19
3.2 連続写像法	21
3.2.1 パラメータと解の関係	21
3.2.2 解軌跡の構成	24
3.3 配水管網のモデル	25
3.3.1 定流出源モデル (モデル 1)	25
3.3.2 抵抗負荷モデル (モデル 2)	29
3.4 連続写像法の適用	30
3.4.1 配水管網のシステム方程式の解の性質	30
3.4.2 定流出源モデルの流量解析	32
3.4.3 抵抗係数に関する流量解析	43

3.5	数値積分に関する検討	51
3.6	結 言	54
第4章	地域および時間分割による送水運用計画の最適化	56
4.1	序 言	56
4.2	二重分割法	57
4.2.1	非線形計画問題の二重分割	57
4.2.2	送水運用計画の二重分割	65
4.3	時間-地域の二重分割による送水運用計画問題	66
4.3.1	運用計画問題の定式化	66
4.3.2	時間分割した最適化問題	75
4.3.3	地域分割した最適化問題	79
4.4	計算例とその結果の検討	81
4.5	結 言	93
第5章	進行波特性を考慮した送水管路の異常検知法	94
5.1	序 言	94
5.2	異常検知の基本原理	95
5.2.1	管路の状態判別関数の定義	95
5.2.2	破裂事故の検知	97
5.2.3	閉塞事故の検知	101
5.2.4	管路の摩擦損失を考慮した場合の状態判別関数	102
5.3	状態判別関数による異常検知法	104
5.3.1	時系列相関による位置標定	104
5.3.2	状態判別の手順	105

5.4 シミュレーションによる検討	107
5.4.1 シミュレーションの方法	107
5.4.2 シミュレーション例の説明	109
5.4.3 結果とその検討	111
5.5 結 言	121
 第6章 結 論	 122
 参考文献	 125
 付録A. 二重分割の部分問題における停留条件の導出	 131
付録B. 管路の非定常流の連続方程式について	135
付録C. 四点インプリシット法による非定常管路流の解析	137

第1章 序 論

1.1 本研究の背景

都市地域への人口集中と経済活動の伸展によって、水の需要は着実な増加の傾向にある。しかし、新規の利水用ダムの建設難、供給地域の広域化、浄水費用の上昇、配水池の供給余裕容量の不足、配水網の計測制御機器の不備等の要因から水を安定して経済的に供給できる体制は必ずしも整備確立されていない。

これらの課題を解決するために、水輸送システムの整備とその効率的運用が図られてきた。水輸送システムは取水から送水、浄水、配水に至るまで、ポンプ、バルブ、管路網、配水池、浄水プラント等多くの機器や設備から構成され、また計画、管理、制御等多様な側面をもっている。そして、水輸送システムを有効適切に運用するためには、システムの設計、制御、監視に関わる基本的技術とその方法論を確立する必要がある。

このような水輸送システムのもつ背景のもとに、配水管網の解析と制御の問題、広域運用の最適化の問題、及び幹線送水管路の監視の問題の解決が基本的に重要な課題となっている。

1.2 本論文の内容概説

上記の動機づけのもとに、水輸送システムの運用に関する幾つかの考察を行った。本論文はそのまとめであり、序論としての本章を含め6つの章から構成されている。まず、第2章において後の議論の準備として水輸送システムを取り扱うモデルについて考察する。第3章では配水管網の基礎的な解析法について考察する。第4章では、広域的な水輸送配分問題について考察し、最後に第5章では管路の状態を監視する方法について考察する。

以下に各章の概要を述べる。

第2章では、まず水輸送システムの問題分析を行い、次に考察する対象としての水輸送システムのモデルについて述べる。基本モデルは、動的モデルと静的モデルに大別される。前者には水撃現象を表現する圧縮性流体モデルとサージ現象

を表現する剛体モデルがあり、それらは各々、電気回路における送電線及び R L C 回路に対応することを示す。一方、静的モデルは、定常的な流れを対象とし、配水管網が非線形抵抗回路網に対応することを述べる。更に、水の輸送において、流量収支のみを考察の対象とする地域輸送モデルについて述べる。特に、後の各章の議論で用いられるモデルを重点的に考察した。

第3章では、配水管網の流量解析の方法として、変数とパラメータに対する連続写像の適用を提案する。変数とパラメータから成る空間において、連続写像によって得られる解軌跡を追跡することで解の挙動を知ることができる。ここでは、非線形抵抗回路網の解を求める場合と、回路網の抵抗係数が変化したときの解を追跡する場合について考察する。

配水管網の抵抗特性、すなわち損失水頭の特徴は一般に流量 q に関して Kq^u の形式で表されることに着目すると、パラメータ $s \in [1, u]$ を変化させることにより、 $s = 1$ における配水管網の線形方程式 f_1 、及び $s = u$ における解くべき配水管網の方程式 f_u の2つの関数の間の連続写像が得られる。その結果、容易に得られる $f_1 = 0$ の解を初期値として、連続写像から導かれた微分方程式 $dq(s)/ds$ を解くことによって、解軌跡 $\{q(s), s \in [1, u]\}$ が得られ、解軌跡の端点 $q(u)$ が $f_u = 0$ の解となる。また、抵抗係数 K が変化する場合の解析では、新しいパラメータを導入して連続写像を構成し、解軌跡の追跡によって抵抗係数の変化に対する解の変化を連続的に知ることができることを示す。配水管網の例題を用いて、連続写像による解析の方法及びその効果について述べる。

第4章では、広域水輸送の配分スケジューリング問題について考察している。複数の配水地域からなる広域水輸送システムでは、配水地域毎の配水制約条件を満足するとともに、地域相互間の協調を実現する必要がある。スケジューリング問題は浄水、輸送、ポンプ等の経済費用を日間にわたって最小化することを目的とする数理計画問題として表される。第4章では、この数理計画問題に対して部分問題への分割を二重に施す方法を適用し、従来の数理計画法に比べて効率的に解が求められることを示す。すなわち、時間的に結合している関係を切断して各時間断面での部分最適化問題を解き、次に地域間の結合関係を切断して各地域毎の部

分最適化問題を解き，この二重の分割を交互に行うことによって，全体の最適解を得る方法である。水輸送の配分スケジューリング問題に対するこの方法の利点は，各々の分割された問題が実行可能解をもつこと，分割された問題は小規模であり，2レベル法によって簡単に求められることにある。例題によってこれらの利点を他の従来法と比較して検討する。

第5章では，幹線送水管路の監視方式について考察している。管路を流れる水を圧縮性流体としてモデル化し，その圧力及び流速の波動伝搬現象に着目する。波動には前進波と後進波が存在するが，ある距離をおいた2点間での圧力と流速の間には，波動の伝搬の特性曲線上で不変的に一定値をとるシュナイダー－ベルジョロン（Schneider－Bergeron）の関係式が成立することが知られている。管路に異常が発生したとき，この関係式が正常時と異なった値を示すことを利用して事故発生を検知し，その事故の種類，位置，規模を推定できることを示す。すなわち，シュナイダー－ベルジョロンの関係式を管路の状態判別式として定義し，その値の変化を識別することによって，正常，破裂事故及び閉塞事故の各々の状態の判別が可能である。破裂事故の場合，水撃現象のみの場合，水撃現象による破裂事故の場合，中間地点の閉塞の場合，及び既存破裂事故のある管路の場合の5例の数値実験によって，この検知方式の有効性を検討する。その結果，いずれの場合も2地点の情報から，その間の管路の状態の判別が的確に行えることを明らかにする。

第6章は，本論文の結論であり，第2章から第5章までに得られた結果をまとめるとともに，今後に残された問題について述べる。

第2章 水輸送システムのモデル

本章では、まず水輸送に関わる問題を整理し、必要となるシステム技術の枠組をとらえ、次に後章の議論で用いられるモデルについて述べる。

2.1 水輸送システムの問題分析

水輸送システムが担う使命は、(a)安全な水質の水を、(b)十分な水量と適切な水圧で、(c)連続して供給することである。一方、これらの使命を実現するための運用制御システムは、(d)経済性、(e)信頼性、(f)操作性をもつことが要求される。これらの多様な使命、目的を達成するためには、上水道施設の計画及び運用が総合的にみて調和が取れていることが必要である。

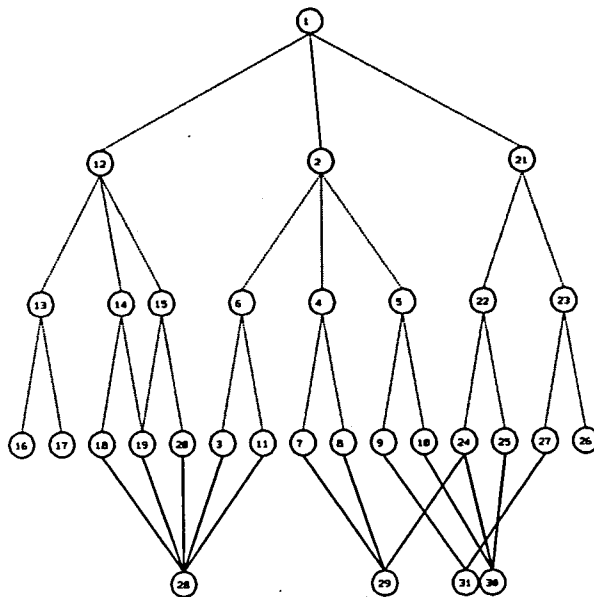
水輸送システムのもつ目的として、第2.1表の第1項から第27項に示す項目が考えられる。これらの目的を達成する運用システムとして、第28項から第31項に示す水質管理システム、系統異常監視システム、輸送配分管理システム及び配水管網制御システムの4システムが代表的である。この水輸送システムで考えられる31項目間の相互の関係を、構造化手法^(21,33)(ISM: Interpretive Structural Modelling)を用いて調べてみよう。ISMは、2項目間の関係から推移則によって、全体の項目相互の関係を得ようとするものである。ここでは項目間の関係として、「項目Aを実現するためには、項目Bの実現が必要である」という必要関係で分析することとする。例えば、①水供給サービスの向上の実現には、②コストの低減、③安全な水質の供給、及び④十分な水量の供給の実現が必要である。また、②コストの低減を実現するには、⑤有収率の向上、⑥動力費用の低減及び⑦薬品費の低減の3つの目的を実現することが必要である。

目的としての項目①～⑦の全てについて、項目間の必要関係を分析することによって全体の構造がわかり、これを第2.1図に示す。目的の項目が階層構造として表されている。

次に、目的を実現するための4つの運用システムが、目的項目とどのような関係にあるかを調べると、同図中実線で示すような関係にあることがわかる。例え

第2.1表 水輸送システムの目的とその運用システム

1	水供給サービスの向上
2	コストの低減
3	良質の原水の確保
4	有収率の向上
5	動力費用の節減
6	薬品費用の節減
7	設備の信頼性向上
8	漏水防止
9	制御機器の適正運用
10	ポンプ運転の最適化
11	経済的な薬品使用
12	安全な水質の供給
13	水源の水質の保全
14	輸送N / W中の水質の確保
15	浄水プラントの適正運用
16	河川水質の規制
17	取水制御
18	赤水や白濁の防止
19	残留塩素濃度制御
20	薬品の適正使用
21	十分な水量の供給
22	連続供給
23	適正圧力の確保
24	事故復旧能力
25	取水浄水配水の一貫性
26	配水N / Wの適正化
27	末端圧力の制御
28	水質管理システム
29	系統異常監視システム
30	輸送配分管理システム
31	配水網制御システム



第 2.1 図 水輸送システムにおける目的項目
と運用システムの相互関係（番号
は第 2.1 表に対応）

ば，⑩輸送配分管理システムは，⑩ポンプ運転の最適化，②事故復旧能力及び，
⑤取水浄水配水の一貫性の 3 つの目的項目を実現するために必要である。

このように，水輸送システムは多数の目的を含み，その目的を実現するための
運用システムが必要であることが，構造分析によって明らかにされた。

さて，水輸送システムの運用を考える際には，第 2.2 表に示すように様々なシ
ステム技術が必要である。主なシステム技術として，システム分析，予測技術，
総合最適化，個別最適化，ネットワーク解析，流体解析，及び不定流解析等の
技術がある。システム分析では，システムの使命分析，目的分析等が，前述した
構造化手法等によって行われる。予測技術は，日間あるいは時間単位の水需要予
測を行うもので，相関分析や GMDH (Group Method of Data Handling)
等の統計的手法が用いられる。総合最適化は，取水から浄水処理プロセスの薬品
注入制御，及び送水制御に至る一貫制御や配水地域間の協調制御等を行うもので
あり，システム全体の運用指針を与えるものである。一方，個別最適化はポンプ

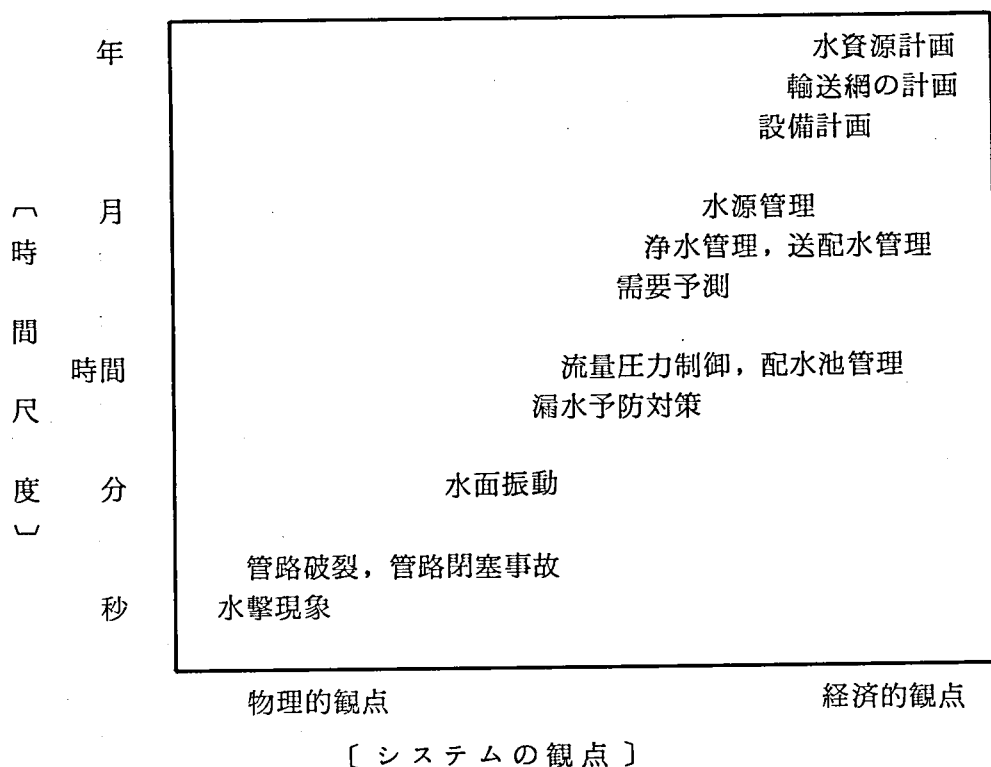
第2.2表 水輸送システムの運用に必要とされるシステム技術

技 術	内 容
システム分析	送配水事業の使命分析 運用目的の構造分析
予測技術	長期需要構造 短期需要変動
総合最適化	取水浄水送水の一貫制御 配水地域制御と協調制御
個別最適化	配水池，ポンプ，バルブ制御 プラント制御 開水路制御
ネットワーク解析	管網圧力流量分布計算 管径，制御点の最適設計 ポンプ，バルブによる圧力・流量制御
流体解析	水撃現象の解析，サージ現象の解析 事故解析
不定流解析	河川，開水路の水位・流速の動的解析 ポンプ井の動的解析

制御，浄水プラント制御等，個々の機器や設備の制御を行うものである。配水管網のネットワーク解析，管路流の流体解析，及び開水路の不定流解析等は，水輸送システムの運用制御のための基礎的な知識を得るものとして重要である。

このようなシステム技術の展開は，水輸送システムにおける最近の顕著な傾向であり，多分野にまたがる技術の集約が必要であることが理解される。

水輸送システムにおける現象や課題を，時間軸で見ると第2.2図のように表される。ここに横軸は，便宜上，対象とする目的で表している。最も短い時間の現象として水撃現象があり，それよりも長い時間尺度では，配水池網のサージ現象がある。更に時間単位では，配水管網の圧力制御，流量制御，及び配水池制御が考えられる。



第 2.2 図 水輸送システムにおける課題

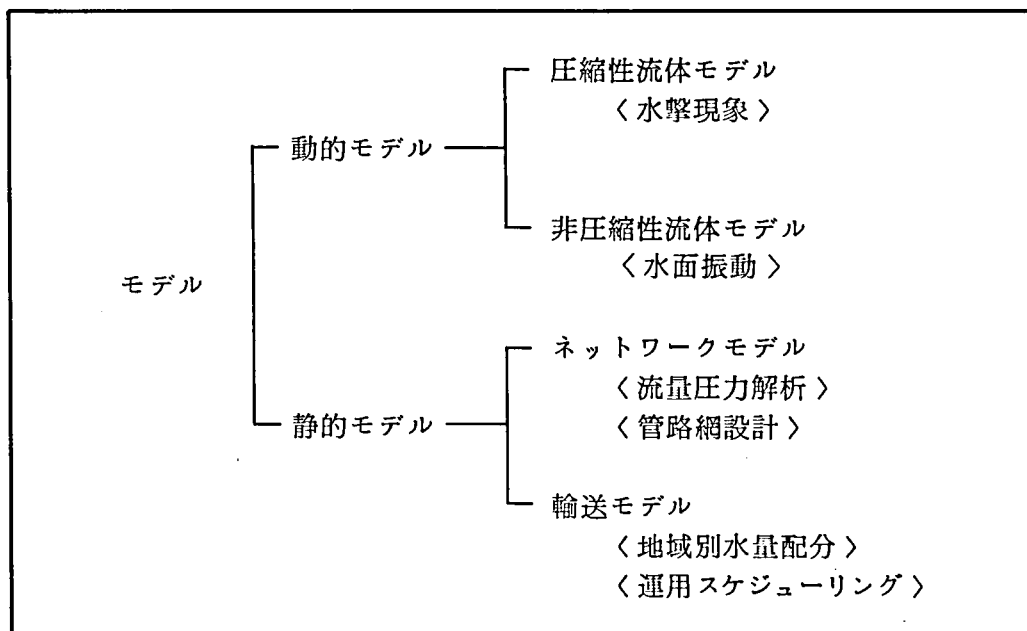
日月単位では、スケジューリングの問題があり、更に長期では、建設計画や配水網の設計、送水容量の設計等が考えられる。また、時間尺度が短い程、水理的な現象の解析が主眼であり、制御系の設計もこれらの現象を基礎としている。一方、長期の時間尺度からは、経済的な運用管理、及び設計に問題の主眼点に移る。このように、水輸送システムがもつ現象や問題は、多岐にわたっていることがわかる。

2.2 モデルの分類

水輸送システムを考察するとき、その目的に応じたモデルを作成する必要がある。本節では、水輸送システムを考察する際に基本となる水の流れに関する幾つかのモデルについて概説し、それらの間の関係について述べる。モデルを対象と

する現象によって分類すると，第 2.3 表に示すように動的モデルと静的モデルに大別される。動的モデルでは水の圧縮性を考慮に入れる場合とそうでない場合が

第 2.3 表 水輸送システムにおいて考察の対象となるモデル



あり，前者は水撃作用のような極めて短い時間での圧力の過渡現象の解析に用いられ，一方，後者は水力発電所のサージタンクの挙動解析，配水管網の中の配水池の水位，流速の振動解析や，ポンプ脈動解析等に用いられる。一方，静的モデルには，配水網の圧力と流量を解析するためのネットワークモデルがあり，電気回路網における抵抗回路網に相当する。最後に，輸送モデルは配水網を巨視的に取り扱い流量収支のみに着目したモデルである。

2.2.1 圧縮性流体モデル

1本の管路中を流れる水は、一次元解析法によって得られる次の運動方程式と連続方程式によって近似的に表される⁽²⁸⁾。

運動方程式：

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + h'_\ell = 0 \quad (2.1)$$

連続方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v) = 0 \quad (2.2)$$

ここに

v ：断面平均流速 $[m/s]$ ， h ：ピエゾ水頭 $[m]$

ρ ：水の密度 $[kg/m^3]$ ， g ：重力加速度 $[9.8 m/s^2]$

h'_ℓ ：単位距離当り損失水頭 $[m]$ ， x ：距離 $[m]$ ， t ：時間 $[s]$

損失水頭 h'_ℓ は流速 v の関数である。また、ピエゾ水頭 h （以下、単に水頭と呼ぶ）は次式で定義される。

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (2.3)$$

ただし、 z は基準面からの管路軸までの高さ $[m]$ ， p は静水圧 $[kg/m^2]$ である。

なお、 $h + v^2/2g$ を全エネルギー水頭， $v^2/2g$ を速度水頭， z を位置水頭， $p/\rho g$ を圧力水頭と呼ぶ。

(2.2)式は、管路の弾性変形を考慮して次の(2.4)式に書き直される(式の変形については付録Bを参照)。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

ここに、 c は圧力波の伝搬速度〔m/s〕で、管厚 e 、流体圧縮率 $1/E$ 、管の内径 D 、管の弾性係数 E_s から近似的に次式で決る定数である。

$$c = \left\{ \rho \left(\frac{1}{E} + \frac{D}{eE_s} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

さて、(2.1)式と(2.4)式をまとめて表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v & g \\ \frac{c^2}{g} & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h'_{\ell} \\ v \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

を得る。(2.5)式は波動方程式であり、右辺第1項の係数行列の固有値 r は波動の特性速度と呼ばれて、その値を求めると $r = \pm c + v$ である。すなわち、波動の伝搬は流速 v だけシフトされるドップラ (Doppler) 効果を表している。

上水道では、流速 v の値は経済速度として $1 \sim 3$ m/s である。一方、 c の値は材質等によって異なるが、約 $600 \sim 1100$ m/s の値をもつ。従って、 $c \gg v$ であるので、管路中の水撃波のような波動伝搬の特性速度 r は、 $r = \pm c$ と考えてよい。なお、特性速度 $r = dx/dt$ であるから、 $dx/dt = \pm c$ となり、特性曲線は $x-t$ 平面で2本の直線となる。

次に、(2.1)式の第1項および第2項は、 $c \gg v$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \doteq \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

と近似される。

同様にして、(2.2)式は、付録Bに示す通り、

$$\left(1 + \frac{v}{c} \right) \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

とも表されるが、(2.7) 式の第 1 項は $c \gg v$ を考慮して、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} &\doteq \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho c^2} \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

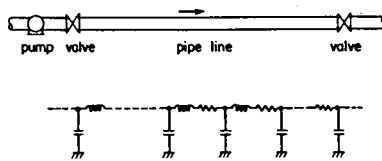
と近似される。

以上から、(2.1) 式及び (2.2) 式は $c \gg v$ を考慮すると、次の (2.9) 式及び (2.10) 式として近似される。

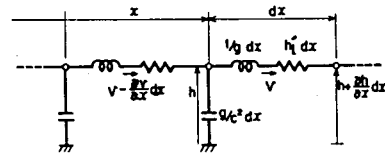
$$-\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + h'_\ell(v) \quad (2.9)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.10)$$

(2.9) 式と (2.10) 式の波動方程式から、圧縮性流体の流れを電気回路に対応させると、第 2.3 図に示すように送電線と相似であることがわかる。水頭 h を電圧に、流速 v を電流に対応させれば、(2.9) 式右辺第 1 項から、インダクタンスが $1/g$ ，抵抗による電位降下が $h'_\ell(v)$ ，(2.10) 式右辺から、キャパ



(a) 管路



(b) 管路の送電線表現

第 2.3 図 管路と送電線の相似

シタンスが g/c^2 の送電線に相当する。このように管路における水撃現象は、送電線におけるサージの伝搬現象と同様の取り扱いができる。この圧縮性流体の性質を用いて、送水管路の破裂事故や閉塞事故を検知する方法については、第5章で詳しく論じる。

2.2.2 非圧縮性流体モデル

非圧縮性流体モデルでは、水の圧縮性を考慮しない。すなわち、1本の管路において流速は距離について一定とし、運動方程式のみを考える。(2.1)式は、 $h'_\ell = \partial h_\ell / \partial x$ とすれば、

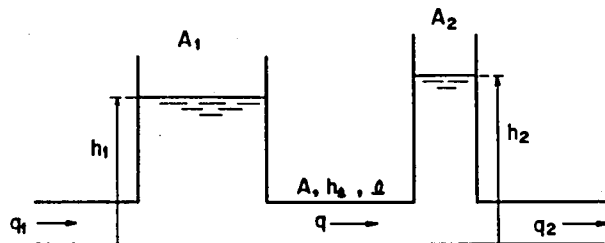
$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} + h + h_\ell \right) = 0 \quad (2.11)$$

と表される。ここで、管路断面積 A が一定で長さ ℓ の管路を考え、流量を $q=vA$ として(2.11)式を長さ方向に積分すると次式を得る。

$$\frac{\ell}{gA} \frac{dq}{dt} + H_\ell - H_0 + h_\ell = 0 \quad (2.12)$$

ここに、 H は全エネルギー水頭で $H_\ell = \left(\frac{v^2}{2g} + h \right)_{x=\ell}$, $H_0 = \left(\frac{v^2}{2g} + h \right)_{x=0}$ である。 h_ℓ は距離 ℓ の間に生じる損失水頭である。

次に、管路の端点にある池やタンクにおいては、流量の連続方程式が成立する。例えば、第2.4図のような場合では、池の断面積を各々、 A_1 及び A_2 、また池へ



第2.4図 タンクと管路のモデル

の流入量及び流出量を各々， q_1 及び q_2 とし，2 池間の流量を q とすれば次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= -q + q_1 \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} &= q - q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

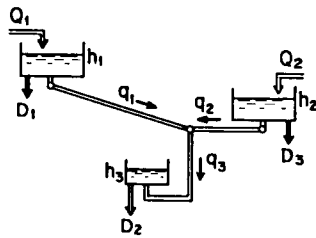
ここに， h_1 と h_2 は基準面からの池の水位であり，静水と仮定すればエネルギー水頭に等しい。

このようなモデルでは，水の圧縮性は無視されるので，剛体モデルと呼ばれ，水力発電所における弁閉鎖に伴うサージの振動解析⁽⁴⁹⁾や，配水池が管路によって結ばれた水位振動の解析^(50,65)に用いられている。

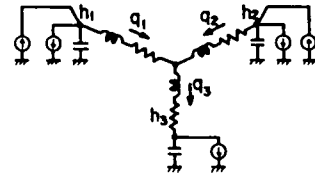
ここで，複数の配水池が管路で結ばれている配水池網のモデルについて考えよう。いま，第2.5図のような例を取りあげる。まず，流量の連続方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} q_3 &= q_1 + q_2 \\ A_1 \frac{dh_1}{dt} &= -q_1 + Q_1 - D_1 \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} &= -q_2 + Q_2 - D_2 \\ A_3 \frac{dh_3}{dt} &= q_3 - D_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

ここに， Q_1 と Q_2 は各池への流入量， D_1 ， D_2 ， D_3 は各池からの流出量である。



(a) 配水池網



(b) 配水池網の電気回路網表現

第 2.5 図 配水池網のと R L C 回路網の相似

次に、配水池を結ぶ 3 本の管路について運動方程式を導けば、次式となる。

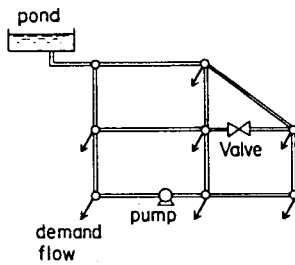
$$\left. \begin{aligned} \frac{\ell_1}{ga_1} \frac{dq_1}{dt} &= h_1 - H_0 - h_{\ell 1}(q_1) \\ \frac{\ell_2}{ga_2} \frac{dq_2}{dt} &= h_2 - H_0 - h_{\ell 2}(q_2) \\ \frac{\ell_3}{ga_3} \frac{dq_3}{dt} &= H_0 - h_3 - h_{\ell 3}(q_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

ここに、 ℓ_i 及び a_i ($i=1, 2, 3$) は管路の長さ及び断面積、 $h_{\ell i}$ ($i=1, 2, 3$) は管路の損失水頭で流量 q_i の関数、 H_0 は 3 本の管路の接続点のエネルギー水頭である。

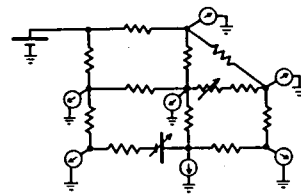
このような配水池網を電気回路網と対比させることができる。流量 q 及び水頭 H (配水池では h) は、各々電気回路の電流及び電位に対応する。(2.14) 式より、配水池はキャパシタンス A_i をもつキャパシタとして、また、(2.15) 式より、管路は ℓ_i/ga_i のインダクタンスと電位降下 $h_{\ell i}(q_i)$ の抵抗をもつことがわかる。従って、第 2.5 図に示すように、配水池網は L R C をもつ電気回路網としてモデル化でき、電気回路網と同様にして配水池及び管路流量に表れる水位や流量の解析をすることができる。

2.2.3 ネットワークモデル

配水管網の定常的な状態の解析を行う場合には、静的なモデルで行い、管路網解析として知られている。第2.6図に示すように、管路網は電気回路網と相似性をもっている。すなわち、一定の水位をもつ配水池である水頭源は電圧源として、一定流出量をもつ需要端である流量源は電流源としてみなされ、水頭損失をもつ管路やバルブは抵抗として、またポンプは流量と水頭に一定の関係をもつ従属電源としてみなされる。そこで、流量を電流、水頭を電圧に対応させれば、管路網は電気回路網におけると同様に、グラフ理論を用いることによって解析できることがわかる。管路網グラフは、実際の管路網に対して1個の仮定の基準節点を与え、配水池、需要端、管路、ポンプ、バルブ等をグラフの枝として表し、それらの枝を節点によって接続する。管路網グラフでは、配水池及び需要端と仮定基準節点とは流出入枝で結ばれている。



(a) 配水管網



(b) 配水管網の電気回路網表現

第2.6図 静的な配水管網と電気回路網の相似

管路網グラフでは、電気回路網と同様に次の抵抗則及びキルヒホッフの2則が成立する。

(i) 抵抗則：

$$h_i - h_j = h_\ell(q_{ij}) \quad (2.16)$$

ここに、 h_i 及び h_j は節点 i 及び j の水頭、 q_{ij} は $i-j$ 間の流量、 h_ℓ は流量 q_{ij} の関数として表される損失水頭である。

(ii) 流量保存則： 各節点における流量の代数和は零である。

(iii) 水頭閉合則： 閉路の水頭和は零である。

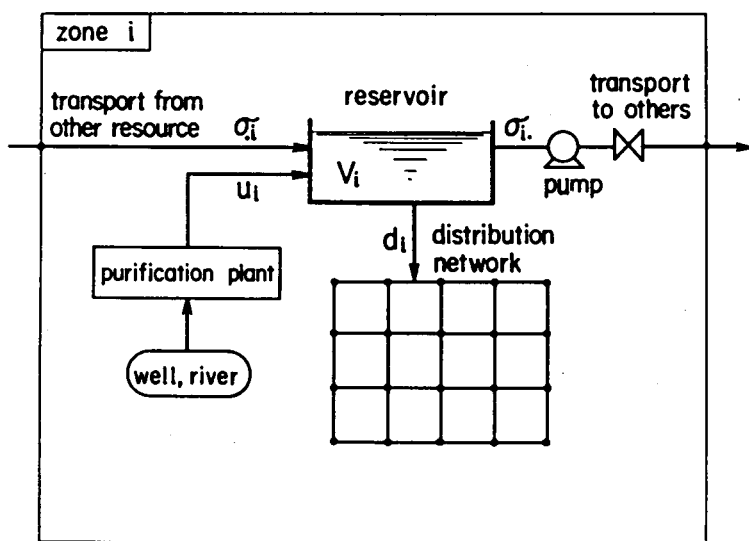
上記の抵抗則及びキルヒホッフの2則を用いて、管路網グラフで成立する代数方程式が導かれる。その際、独立変数の取り方によって、三種の定式化の方法がある。第一は、管路網グラフの補木枝の流量を独立変数とする補木流量法、第二は管路網グラフの節点水頭を独立変数とする節点水頭法、第三は閉路流量を独立変数とする閉路法（メッシュ法）である。また、導かれた代数方程式を解く求解法としては、NR（ニュートン・ラフソン）法とハーディークロス（Hardy-Cross）^(66,67)法がよく用いられている。前者のNR法は通常の数値解析で用いられてよく知られた方法である。一方、ハーディークロス法は手計算のために考えられたもので、NR法におけるヤコビ行列の対角成分のみを考慮したものである。

この静的なネットワークモデルによって配水管網の流量及び水頭の解析が行われるが、第3章では、補木流量法によって定式化を行った上で、ネットワークの解の性質を調べるために連続写像の適用性について論じる。

2.2.4 地域水輸送モデル

日常の配水運用では、需要水量を満しつつ運用コストを最小限に保持する目的に対して、適切な制御策を決定する。都市地域では、配水池を各地に分散配置して、各配水池が部分的な地域の需要を受けもつようにすることが多い。配水池を中心とした一つの地域を形成することによって、その地域内の圧力や流量の制御を独立して行えると同時に、事故時には、他地域への波及防止を容易に行えるためである。各地域では、水源及び浄水場をもって自地域の水需要をまかなうが、取水施設がなく、他の地域からの融通水に依存する場合もある。

第2.7図に一つの地域の構成例を示す。地域内の配水網はその細部を無視して、一括した水需要量 d_i で配水網に流れる量を代表する。地域内に浄水場をもつ場合には、供給量 u_i が考慮される。貯水量 V_i をもつ配水池は需要量の変動を吸収するバッファーであり、かつ浄水場の滑らかな運転を可能にする機能をもって



第 2.7 図 配水池、取水源及び配水網で構成される配水地域

いる。地域の間では，相互に水を融通する連結システムをもち， σ_i を融通水量として表す。全体を幾つかの地域に分割することによって，各々の地域は圧力や流量に関して独自の制御をすることが可能である。一方，全体の運用としては，地域内部の細部には触れずに，地域の水収支のみに注目することによって巨視的な運用の最適化方策を決定することができる。

地域の運用では，需要水量を満すこと，貯留量を適切な範囲内に保持すること，浄水場運転費用を最小にすること，及び地域間の水輸送費用を最小にすること等が必要である。第 4 章で，複数の地域が結合した地域の貯水量，取水量，地域間融通量などを決定変数とする運用最適化問題について論じる。

第3章 連続写像法による配水管網の解析

3.1 序 言

上水道は原水を浄化する浄水施設と、需要家に安定して水を供給する配水施設から成っている。配水施設には、需要と供給の水量バランスを取るための配水池や、適正な水圧に制御するためのポンプ及びバルブがあり、さらに各戸に供給する配水管系統がある。最近では、水資源の有効利用、水圧の適正化、省エネルギーを目指して、よりきめ細かな上水道系統の管理制御を実現することが重要になっている。そのために、特にその基本となる配水管網の解析に多くの研究が行われてきた。

第2章で述べたように、配水管網は電気回路網と相似であり、電気回路網と同様の定式化と解析を行うことが可能である。特に時間を考慮しない静的な解析では、非線形抵抗回路網として取り扱うことができる。配水管網のネットワークは、2.2.3節で述べたように管路網グラフとして表され、その定式化の方法として、補木流量法、節点水頭法及び閉路法の三種がある。いずれの定式化によっても、非線形代数方程式が導かれるが、その解法としてはNR法及びその簡略法であるハーディークロス法が代表的である。文献(67)によれば、マーロウ(Marlow)法とマーティン・ピータース(Martin-Peters)法は、節点水頭法によるモデルをNR法で解く方法であり、閉管路方程式法及び小沢氏の方法^(55,56)は補木流量法をNR法で解く方法である。

また、キルヒホッフの第1則および第2則の成立するネットワークでは、最小エネルギー消費の状態で流れが存在することを利用した方法^(41,42,43)がある。

以上の研究の他に、ポンプやバルブの制御を目的とした配水管網の解析^(4,5,44,45,46)、配水管網の内部状態変数推定方法の研究⁽⁶⁹⁾、グラフ理論による研究⁽⁷⁰⁾等がある。

従来の研究で用いられてきた求解法は、NR法及びその簡略的なハーディークロス法であり、NR法を直接用いるか、あるいはそれに変形を施したものであった。すなわち、配水管網に独特な抵抗(損失)特性の非線形性に直接着目したも

のはなかった。上水道の管路の抵抗特性は一般に流量の u 乗 (Kq^u) で表されるが、このような u 乗形式で表される抵抗特性に対して着目した求解法は提案されていない。また、従来は管路の抵抗係数 K を固定した場合の求解法に止まっており、抵抗係数 K が変化したときの解の変化を連続的に知る方法は研究されていなかった。

本章はあるパラメータを導入して、そのパラメータを連続的に変化させて配水管網の解析を行う方法について論じるものである^(14,15)。まず、3.2 節ではその方法の基礎となる連続写像法について概要を説明する。これは、まずパラメータを含む非線形代数方程式について陰関数定理を適用し、求めるべき解が満さなければならぬパラメータに関する微分方程式を導く。次に、この微分方程式を解くことによって、パラメータに関する解の軌跡を求め、最初に与えたパラメータ値（パラメータの初期値）に対する解から、所要のパラメータ値に対する解を求める手法である。

この連続写像法は、不動点アルゴリズム^(24,32)、最適制御問題及び制御系極配置問題への応用⁽⁵⁷⁾、非線形計画法への応用^(22,23)、力学系の応力解析⁽⁴⁸⁾などの分野において研究されているが、本章で述べるようなネットワークの解析問題に対して適用した例は、今までのところ見あたらない。

3.3 節では、対象とする配水管網の定式化について述べ、二つのモデルを取り上げる。一つは定流出源モデルで、需要端からの流出流量が既知の一定値をもつと仮定して、管網内の流量を求めるものである。他方は、需要端に負荷抵抗の特性を与え、流出流量が末端圧に依存する場合である。

3.4 節では、この二つの配水管網モデルを用いて、パラメータ値の変化による流量解析法と、管路の抵抗係数変動の場合の解析の方法について論じる。いずれも幾つかの計算例を示して定量的な議論を行う。

3.2 連続写像法⁽²⁴⁾

3.2.1 パラメータと解の関係

連続写像法は位相幾何学の分野で研究されたものである。この方法の目的は、非線形方程式の解を求めることにあり、パラメータを変数として扱い、方程式をパラメータに関して連続的に変化させながら解を追跡するものである。

最初に、例でこの解法を示す。解くべき対象の非線形方程式系を

$$F(x) = 0 \quad (3.1)$$

とする。ここに $x \in R^n$ であり、 F は R^n 全体で定義され、 R^n で連続微分可能とする。つぎに、 R^n において既知な解 x^0 をもつ、あるいは容易に解ける補助方程式系

$$F_0(x) = 0 \quad (3.2)$$

を定義する。連続写像法は (3.2) 式を連続的に (3.1) 式まで変形し、 x^0 を出発点とする変形の過程で生成される解の軌跡を追跡するものである。その方法としてパラメータ $s \in [s_1, s_2]$ を導入し、

$$H(x, s_1) = F_0(x)$$

$$H(x, s_2) = F(x)$$

を満す関数の族 $H: R^n \times [s_1, s_2] \rightarrow R^n$ を定義する。このような写像 H は F_0 と F の間のホモトピーと呼ばれる。また、 $H(x, s)$ をホモトピー関数、 s をホモトピーパラメータ、 $H(x, s) = 0$ をホモトピー方程式と呼ぶこともある。ホモトピーの構成の方法としては、 $s \in [0, 1]$ として、

$$H(x, s) = (1-s)F_0(x) + sF(x) \quad (3.3)$$

のように定義することが多い。パラメータ s は、不動点アルゴリズムのように値域を $[0, 1]$ に限定する必要はなく、任意の値域で定義してかまわない。

さて、 $H(x, s)$ を定義したとき、方程式

$$H(x, s) = 0, \quad s \in [s_1, s_2] \quad (3.4)$$

の解 $x(s)$ について考えよう。解 $x(s)$ が $s \in [s_1, s_2]$ の変化に対して連続的に依存する、すなわち、(3.4) 式を満たすような連続写像 $x: [s_1, s_2] \rightarrow R^n$ が存在すると仮定する。このとき、始点を $x(s_1)$ ($H(x, s_1) = F_0(x) = 0$ の解) とし、終点を $x(s_2)$ ($H(x, s_2) = F(x) = 0$ の解) とする曲線が、空間 R^n に存在する。関数 $H(x, s)$ がノルム強圧の条件を満たす、すなわち、

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|H(x, \cdot)\| = \infty$$

が成立しているならば、このような連続な曲線が R^n に存在する。以下では、ノルム強圧性を仮定する。

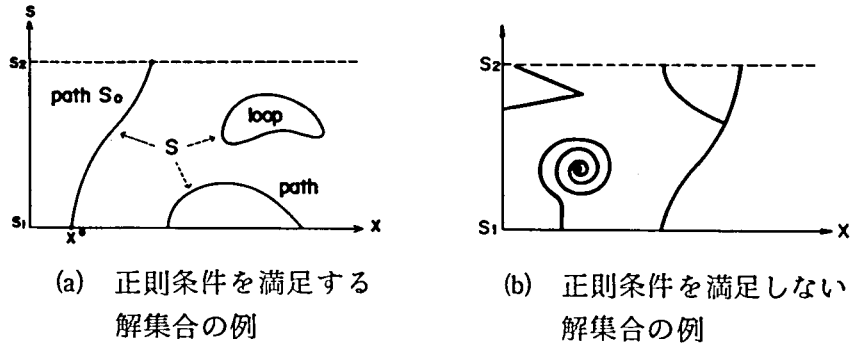
更に、 H が次の正則条件を満たすと仮定する。すなわち、 H が連続微分可能であるとき、次の2条件が成立するとする。

- (i) $H(x, s) = 0$ を満たす全ての $(x, s) \in R^n \times [s_1, s_2]$ に対して、 H の $n \times (n+1)$ ヤコビ行列 $H_{x,s} \triangleq \partial H / \partial (x, s)$ の階数は n である。
- (ii) $F(x) = 0$ 及び $F_0(x) = 0$ を満たす全ての $x \in R^n$ に対して、それらの $n \times n$ ヤコビ行列 $\partial F_0 / \partial x$ 及び $\partial F / \partial x$ の階数は n である。

このとき、次の定理が成立する。

[定理1] ⁽²⁴⁾ ホモトピー関数 H が連続微分可能で正則条件を満たし、更にノルム強圧的であると仮定する。このとき、 $x: [s_1, s_2] \rightarrow R^n$ なる連続写像が存在し、 x は s に関して連続微分可能である。また、 (x, s) 空間の解軌跡は、互いに交わらない有限個の連続な曲線の集合となる。

従って、(3.4)式を満たす解集合は、第3.1図(a)に示すような連続したパス、あるいはループとなることが保証される。正則条件が満足されないと、第3.1図(b)に示すような尖点、分岐点や渦巻状の解軌跡となる場合もある。



第3.1図 解集合 $S = \{ (x, s) \mid H(x, s) = 0 \}$

上の正則条件及びノルム強圧性の条件が成立するとき、解軌跡 $x(s)$ の上で次式が成立する。

$$dH = H_x dx + H_s ds = 0 \quad (3.5)$$

あるいは、ホモトピー関数 H の x に関するヤコビ行列 $H_x \triangleq \partial H / \partial x$ が存在するとき、

$$\frac{dx}{ds} = -H_x^{-1} H_s, \quad x(s_1) = x^0 \quad (3.6)$$

なるダビデンコ (Davidenko) の微分方程式が成立する。また、 H_x が正則であるとするとき、第3.1図(a)のループは存在せず、解集合はパスのみとなる。

3.2.2 解軌跡の構成

3.2.1 節に述べた連続写像の正則条件が成立するならば、陰関数定理^(36,51)より関数 $\mathbf{x} = \phi(s)$ が存在し、 R^n において解軌跡が存在する。あるいは、 (\mathbf{x}, s) の $R^n \times [s_1, s_2]$ 空間においては、 (\mathbf{x}^0, s_1) を始点とし (\mathbf{x}, s_2) を終点とするパスが存在する。第3.1 図(a)に示したパス S_0 について考えよう。パス S_0 は (\mathbf{x}^0, s_1) を始点とする。また、 S_0 は $R^n \times \{s_2\}$ の平面で (\mathbf{x}^1, s_2) の点が終点となるならば、 \mathbf{x}^1 は方程式 (3.1) 式の解である。このことから、 $s=s_1$ のときの解 $\mathbf{x}^0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = 0\}$ を出発点として、パス S_0 を辿って行けば、 $s=s_2$ のときの解 $\mathbf{x}^1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0\}$ に到達できることがわかる。

この解軌跡を数値的に得る方法としては、(3.4) 式を直接解くか、あるいは (3.6) 式に示す微分方程式の初期値問題を解くかのいずれかである。前者の方法では、パラメータを離散的にしか与えられず、解軌跡も離散値として得られる。一方、後者の方法では解が連続的に得られる利点がある。

この初期値問題を解くには、既存の微分方程式を解く方法を用いることができる。最も簡単な方法としてオイラー法を適用すれば、 s の区間 $[s_1, s_2]$ を N 分割 ($N \geq 1$) し、その各ステップにおいて次式を得る。

$$\mathbf{x}^{r+1} = \mathbf{x}^r - \Delta s \cdot \mathbf{H}_x(\mathbf{x}^r, s^r)^{-1} \mathbf{H}_s(\mathbf{x}^r, s^r) \quad (3.7)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$s^0 = s_1, \quad s^N = s_2, \quad \mathbf{x}^0 : \text{既知}$$

ここに Δs は積分の増分である。

この計算の過程で、行列 \mathbf{H}_x が特異に近くなれば、その逆行列の処理が問題となる。その対策としては、パラメータの変換などの方法が考えられている⁽⁵⁷⁾。

(3.7) 式だけでは十分な精度が得られない場合、すなわち真の解軌跡からずれた場合には、ニュートンラフソン法によって修正する必要がある。不動点アルゴリズムにおいては、予測子-修正子のベクトルを求める計算を行い、その計算効率を高める検討が行われている⁽³²⁾。

さて、パラメータ s の導入の仕方は、対象とする問題によって異なる。例えば、考察の対象とする方程式の中にもともと含まれている場合には、そのパラメータの値を $s \in [s_1, s_2]$ のように設定して、 $s = s_1$ に対する方程式を容易に解ける形に与えておく。他方、方程式自身に含まれていない場合には、(3.3)式のような形で導入すればよい。

3.3 配水管網のモデル

上水道の配水管網は管路を枝、管路の接続点及び分岐点を節点とするグラフとして取り扱うことができる。水の送出側にある配水池やポンプは水頭源として扱い、電気回路における電圧源とみなせる。一方、需要家から流出していく需要流出点は、1本の管路に沿って分布しているが、それらの分布流出量を集中化して、1つの節点から流出すると仮定して点流出源として扱えば、電気回路における電流源とみなせる。第2章で述べたように、配水網は第2.6図の電気回路に対応させることができる。ここでは、静的な場合を対象とするので、配水ネットワークの流量と圧力の関係は、非線形連立代数方程式で表される。以下、配水管網のモデルを説明し、二つのモデルを提案する。モデル1は、需要流出点を定流出源として固定する場合である。また、モデル2は需要流出点に抵抗をもつ需要流出枝を付加することによって、需要流出量とその節点水頭に依存している状態にある場合を表す。各々のモデルは、解析の目的に応じて使い分けられる。

3.3.1 定流出源モデル（モデル1）

配水管網においては、流量と水頭に関して、電気回路のキルヒホッフ則と同様に次の二つの関係が成立している。

- ① 流量保存則：配水管網の接続点における流量の代数和は零である。
- ② 水頭閉合則：配水管網内の任意の閉路に沿った各節点間水頭差の和は零である。

これらは、流量及び水頭を各々電気回路網における電流及び電圧に対応させれば、キルヒホッフ則と類似の関係にあることがわかる。更に、次の関係が成立する。

- ③ 抵抗 則：管路流量とその管路に沿った抵抗特性としての損失水頭は次式で表される。

$$h_{\ell}(q) = K |q|^{u-1} q \quad (3.8)$$

ここに、 h_{ℓ} は摩擦損失水頭〔m〕， q は流量〔 m^3/s 〕で、 K は管路の抵抗係数である。この抵抗係数 K 及び u の値の代表的なものは次の二つである。

- (i) ヘーゼン-ウィリアムズ (Hazen-Williams) 式

$$\begin{cases} u = 1.85 \\ K = 10.666 C_H^{-1.85} D^{-4.87} \ell \end{cases} \quad (3.9)$$

ただし、 C_H は流速係数（例えば鋳鉄管では 100 ~ 140）， D は管の直径〔m〕， ℓ は管路長〔m〕である。

- (ii) ダルシー-ワイスバッハ (Darcy-Weisbach) 式

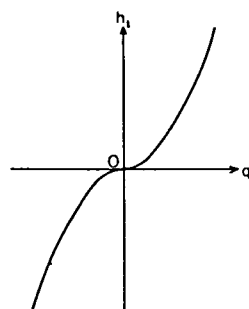
$$\begin{cases} u = 2.0 \\ K = f_d \frac{8}{\pi^2 g} D^{-5} \ell \end{cases} \quad (3.10)$$

ただし、 f_d はダルシー-ワイスバッハの摩擦損失係数， g は重力加速度である。

上記(i)あるいは(ii)のいずれの特性も、第 3.2 図に示すように連続で真に単調増加である。すなわち、(3.8) 式において $u \geq 1$ で、かつ $K > 0$ であるならば、任意の $q_2 > q_1$ に対してつねに、

$$h_{\ell}(q_2) > h_{\ell}(q_1)$$

が成立している。本章で述べる連続写像による解析法は，損失水頭式がこのように真に単調増加であればよく(i)または(iii)いずれの形式，あるいはその補間形式で表されていても適用可能である。流体力学の立場からは， $u = 2$ の場合には完全な乱流であるという意味をもつが，今日の上水道の設計では，慣用的に(i)のヘーゼン-ウィリアムズ式を用いることが多い。そこで，本論文でも(i)を用いて説明することとする。



第 3.2 図 管路の摩擦損失水頭の特徴

さて，モデル 1 では配水池や揚程一定のポンプを定水頭源とし，需要端を定流出源とする。実際の管路網に 1 個の仮想基準節点を加え，定水頭源を木枝，定流出源を補木枝とし，管路の枝を木枝と補木枝に分けて管路網グラフを構成する。このとき，流量保存則，水頭閉合則及び抵抗則は各々次式で表される。

$$\mathbf{q}_G = -[Q_{GR}, Q_{GJ}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_J \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{h}_R = -[B_{RG}, B_{RE}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_G \\ \mathbf{h}_E \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{h}_G = Z_G \mathbf{q}_G \quad (3.13)$$

$$\mathbf{h}_R = Z_R \mathbf{q}_R \quad (3.14)$$

ここに、 Q_{GR}, Q_{GJ} は管路網グラフの基本カットセット行列の特性部分、また、 B_{RG}, B_{RE} は、基本ループ行列の特性部分である。上式で、 h_G は木枝の管路の（節点間）損失水頭、 h_R は補木枝の管路の（節点間）損失水頭、 h_E は定水頭源の水頭、 q_G は木枝の管路の流量、 q_R は補木枝の管路の流量、 q_J は定流出源流量で、各々ベクトルである。添字 G, R, E, J は各々、グラフの木枝、補木枝となる管路、水頭源、流出源を示す。

抵抗則に含まれている Z_G 及び Z_R は対角行列で、その要素は次式で与えられる。

$$z_j = k_j |q_j|^{u-1} \quad (j=1, \dots, \mu \text{ or } \rho) \quad (3.15)$$

前述の (3.9) 式の抵抗則を用いた場合には、 $u = 1.85$ とすることに相当する。ここで、 $u = 1$ とすると、(3.15) 式は定数となることに注意する。

ここに、上式に含まれているベクトルの次元は次の通りである。仮想の基準節点を除いた管路網グラフの節点数を n 、管路の枝数を b 、流出枝数を m 、配水池点数を p とするならば、グラフの補木枝の数は $\mu = b - n + 1$ 、木枝の数は $\rho = n - 1$ である。従って、

q_R, h_R : $\mu \times 1$ ベクトル

q_G, h_G : $\rho \times 1$ ベクトル

h_E : $p \times 1$ ベクトル

q_J : $m \times 1$ ベクトル

Q_{GR} : $\rho \times \mu$ 行列, Q_{GJ} : $\rho \times m$ 行列, B_{RG} : $\mu \times \rho$ 行列, B_{RE} : $\mu \times p$ 行列, Z_G : $\rho \times \rho$ 行列, Z_R : $\mu \times \mu$ 行列である。

さて、グラフの性質よりカットセット行列とループ行列は直交する。すなわち、

$$B_{RG} = -Q_{GR}^T \quad (3.16)$$

である。ここに、 T は転置を表す。従つて、補木枝流量 q_R を独立変数とする次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} F(q_R, u) &= Z_R q_R + Q_{GR}^T Z_G (Q_{GR} q_R + Q_{GJ} q_J) + B_{RE} h_E \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここに、 Z_G 、 Z_R は流量の関数であり、またパラメータ u を含んでいる。

(3.17)式がモデル1のシステム方程式である。

3.3.2 抵抗負荷モデル (モデル2)

モデル1では、負荷点における流出は定流出源として扱い、配水管網内に流れる管路流量を求めることに目的があった。これは需要端の残存水頭が十分高く、需要家が要求するだけの水量を取り出せる場合に相当する。一方、需要端の水頭が許容地盤上残存水頭以下になると、需要家は要求する流量が取り出せず、残存水頭に依存した量しか得られない。このような場合の解析にはモデル1では不適當であり、需要端の流出枝を抵抗負荷と考える必要がある。この場合をモデル2とする。

負荷の抵抗特性については種々の実験式があるが、ここでは負荷特性を次式で与える⁽⁶⁷⁾。ただし、地盤高は全節点で同一として省略している。

$$h_J = k_J |q_J|^{u'-1} q_J \quad (3.18)$$

実験式では、通常 $u' = 2$ とすることが多く、 k_J は需要端流出枝のもつ抵抗係数である。 Z_J を次の成分をもつ対角行列

$$z_{Ji} = k_{Ji} |q_{Ji}|^{u'-1} \quad (i=1, \dots, m)$$

とすれば

$$\mathbf{h}_J = \mathbf{Z}_J \mathbf{q}_J \quad (3.19)$$

と表される。このとき、負荷流出枝は全て補木枝として独立変数として扱い、
(3.11)～(3.14)の4式に

$$\mathbf{h}_J = -[\mathbf{B}_{JG}, \mathbf{B}_{JE}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_G \\ \mathbf{h}_E \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{h}_J = \mathbf{Z}_J \mathbf{q}_J$$

の2式を加えた関係式が成立する。これから次のシステム方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_R + \mathbf{Q}_{GR}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{Q}_{GR}, & \mathbf{Q}_{GR}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{Q}_{GJ} \\ \mathbf{Q}_{GJ}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{Q}_{GR}, & \mathbf{Z}_J + \mathbf{Q}_{GJ}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{Q}_{GJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{RE} \\ \mathbf{B}_{JE} \end{bmatrix} \mathbf{h}_E = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここに、 $\mathbf{Z}_R, \mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_J$ は各々流量 $\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_G, \mathbf{q}_J$ の関数である。

3.4 連続写像法の適用

3.4.1 配水管網のシステム方程式の解の性質

電気回路網において、その抵抗特性が単調であるとき、次に述べる性質が知られている。

抵抗特性を $\sigma = f(\eta)$ とする。ただし、 η は電流(配水管網では流量)、 σ は電圧降下(配水管網では摩擦損失水頭)である。この特性 f に対して、次の性質を定義する。

〔定義〕 真の単調増加：

抵抗の特性 f は、連続であるとする。全ての $\eta_2 > \eta_1$ に対して、つねに $f(\eta_2) > f(\eta_1)$ が成立するとき、この抵抗特性は、真に単調増加であるという。

この真の単調な抵抗特性をもつ電気回路網において、次の定理が成立する。

〔定理 2 〕⁽⁷⁾

真に単調増加で、相互に結合していない抵抗で構成されているネットワークを N とする。このとき、任意に与えられた電圧源あるいは電流源に対して、ネットワーク N は唯一の状態が存在する。すなわち、ネットワークの回路方程式に解が存在し、かつ唯一である。

さて、配水管網は 3.3 節に述べたように、電気回路と相似な形に表現できる。そして、その抵抗特性は連続で真に単調増加であり、相互に結合していない。従って、次のことが言える。

〔系 1 〕 配水管網のネットワークでは、管路の抵抗特性（管路摩擦損失水頭の特
性）が連続かつ真に単調増加である。従って、定水頭源 h_E あるいは定流量源
 q_J を任意に与えたとき、ネットワークの方程式の解が存在し、かつ唯一である。

ここで、配水管網の抵抗特性が真に単調増加であるのは、パラメータが変動しても言えることに注意する。すなわち、(3.8) 式の $h_\ell(q) = K |q|^{u-1} q$ において、

$$\left. \begin{array}{l} u \geq 1, \text{ かつ} \\ K > 0 \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

を満すパラメータ u 及び K に対しても、真に単調増加の特性をもつ。従って、
(3.22) 式を満足するようなパラメータ値に対して、配水管網の解は唯一に存在する。

さて、モデル1のシステム方程式(3.17)式、あるいはモデル2の(3.21)式に対する連続写像を考える。モデル1では、変数を $\mathbf{x} = \mathbf{q}_R$ 、パラメータを $s = u$ とすれば、

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_R, u) \quad (3.23)$$

と表現できる。また、モデル2では、変数 $\mathbf{x} = (\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_G)$ とし、パラメータ s を新しく導入して、その抵抗係数 K 及び K_J を s の関数とすれば、

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J; K(s), K_J(s)) \quad (3.24)$$

と表現できる。

(3.23) 及び (3.24) 式で定義されるいずれの連続写像 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, s)$ においても、その右辺の $\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, u) = 0$ 及び $\mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J; K(s), K_J(s)) = 0$ はネットワークのシステム方程式であり、[系1]から明らかにその解は存在し、かつ唯一である。従って、連続写像 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, s) = 0$ の解集合 (\mathbf{x}, s) は、次の性質をもつことがわかる。

[系2] 配水管網のモデル1及びモデル2のシステム方程式は、これをパラメータ s の連続写像であるとみなしたとき、任意の $s \in [s_1, s_2]$ に対して、解 $\mathbf{x}(s)$ は唯一つ存在する。

すなわち、解集合 (\mathbf{x}, s) では s の任意の値に対して唯一つの $\mathbf{x}(s)$ が定まる。

3.4.2 定流出源モデルの流量解析

本節では、需要端からの流出量が一定であると仮定したモデル1を対象として、配水管網の流量解析に連続写像法が適用できることを示そう。

配水管網の抵抗特性は、(3.8)式によって表されるが、(3.8)式のパラメータ u を連続写像のパラメータ s とした場合、(3.8)式は、

$$h_{\ell}(q) = K |q|^{s-1} q \quad s \in [s_1, s_2] \quad (3.25)$$

と表される。(3.25)式は、 $s_2 = 1.85$ とするとヘーゼン-ウィリアムズ式に相当する。パラメータ s_1 の値は任意に選んでよいが、ここでは $s_1 = 1$ とする。その理由としては、 $s_1 = 1$ のときには、(3.25)式の抵抗特性は線形となり、モデル1のシステム方程式は線形代数方程式となって、その解が容易に得られることにある。

このパラメータ $s \in [1.0, 1.85]$ によって、連続写像 $H: R^{\mu} \times [s_1, s_2] \rightarrow R^{\mu}$ を次のように定義する。

$$H(x, s) = F(q_R, s), \quad s \in [s_1, s_2] \quad (3.26)$$

ここに、 $x = q_R \in R^{\mu}$ であり、右辺の $F(q_R, s)$ は(3.17)式で u を s で置き換えたものである。

連続写像 $H(x, s)$ として定義されるシステム方程式(3.17)式は、その s の両端において、

$$\left. \begin{array}{l} s = s_1 (=1.0) : H(x, s) = F(q_R, 1.0) \\ s = s_2 (=1.85) : H(x, s) = F(q_R, 1.85) \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

と表される。すなわち、(3.26)式及び(3.27)式は s を s_1 から s_2 まで変化させるとき、任意の $s \in [s_1, s_2]$ に対して、 $h_{\ell}(q) = K |q|^{s-1} q$ [(3.25)式]なる抵抗特性をもつネットワークとして定義される。

以上の定義から、パラメータ $s \in [1.0, 1.85]$ の導入によって、容易に解ける線形抵抗をもつシステム方程式 $F(q_R, 1.0) = 0$ と、本来解くべき非線形抵抗をもつシステム方程式 $F(q_R, 1.85) = 0$ を表現できることが理解される。

次に、この連続写像が2.3節で述べた正則条件を満たすことを調べよう。連続写像(3.26)式では、(3.17)式より明らかに $F(q_R, s)$ は連続微分可

能である。また、(3.17)式及び(3.25)式より、ヤコビ行列は、

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}_R} = \mathbf{s} (\mathbf{Z}_R + \mathbf{Q}_{GR}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{Q}_{GR}) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \mathbf{Z}_R \mathbf{A}(\mathbf{q}_R) + \mathbf{Q}_{GR}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{A}(\mathbf{Q}_{GR} \mathbf{q}_R + \mathbf{Q}_{GJ} \mathbf{q}_J) \quad (3.29)$$

である。ここに、 $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{q}_R$ は $\mu \times \mu$ 行列、 $\partial \mathbf{F} / \partial s$ は $\mu \times 1$ 行列である。ただし、(3.29)式の $\mathbf{A}(\cdot)$ は、任意の $n \times 1$ ベクトル \mathbf{y} に対して、その i 成分が次式で定義される $n \times 1$ ベクトルである。

$$\{\mathbf{A}(\mathbf{y})\}_i = y_i \log |y_i| \quad (3.30)$$

(3.28)式において、右辺第1項の \mathbf{Z}_R は正の対角行列、第2項 $\mathbf{Q}_{GR}^T \mathbf{Z}_G \mathbf{Q}_{GR}$ は正定対称行列である。従って、 $\mu \times \mu$ ヤコビ行列 $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{q}_R$ の階数は μ である。

また、 $s=s_1$ における $\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}_R, s_1) / \partial \mathbf{q}_R$ 、また $s=s_2$ における $\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}_R, s_2) / \partial \mathbf{q}_R$ の $\mu \times \mu$ ヤコビ行列の階数も、明らかに μ である。従って(3.26)式で定義される連続写像は、連続微分可能であり、かつ3.2.1節に述べた正則条件を満たすことが確かめられた。よって、[定理1]が成立し、解軌跡 $\mathbf{q}_R(s)$ は有限個のパスからなることが予想される。

一方、連続写像として用いる $\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, s)=0$ は、(3.17)式よりネットワークのシステム方程式である。抵抗特性の $u(=s)$ が(3.25)式のように変化しても、 $s \geq 1$ を満たすから(3.8)式から抵抗特性は常に真に単調増加である。従って、3.4.1節に述べた[系1]及び[系2]が満たされ、任意の $s \in [s_1, s_2]$ 、 $s_1 \geq 1$ に対して解 $\mathbf{q}_R(s)$ は唯一つ存在する。

以上の考察から、(3.26)式で定義される連続写像 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, s)=\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, s)$ は、正則条件を満たし、かつ解が唯一つ存在することが確かめられ、次の定理を得る。

〔定理3〕

(3.26)式で定義される連続写像 $F(q_R, s)$, $s \in [s_1, s_2]$ は連続写像の正則条件を満し, かつ $F(q_R, s) = 0$ は, 唯一解をもつ。更に, この連続写像によって生成される解集合 $(q_R, s) \in R^\mu \times [s_1, s_2]$ は, (q_R^0, s_1) から (q_R^1, s_2) まで連続した唯1本のパスとなる。

すなわち, 第3.1図に示したように, 1本のパス S^0 のみが (q_R, s) 空間に存在することが確かめられた。

次に, 解軌跡 $q_R(s)$ を求める計算法について考えよう。 $F(q_R, s) = 0$ を満する解軌跡の上では, 次のダビデンコの微分方程式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_R}{ds} &= - \left(\frac{\partial F(q_R, s)}{\partial q_R} \right)^{-1} \frac{\partial F(q_R, s)}{\partial s}, \quad s \in [s_1, s_2] \\ q_R(s_1) &= q_R^1 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

初期値 $q_R(s_1)$ は, その抵抗特性が $s = s_1 = 1.0$ で線形となることから, 容易に解けて, (3.17)式から次式を得る。

$$q_R^1 = -(K_R + Q_{GR}^T K_G Q_{GR})^{-1} (Q_{GR}^T K_G Q_{GJ} q_J + B_{RE} h_E) \quad (3.32)$$

ここに, K_G, K_R は抵抗特性の(3.15)式の定数のみよりなる対角行列である。

微分方程式(3.31)式は, (3.28)及び(3.29)式より次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{dq_R}{ds} &= - \frac{1}{s} (Z_R + Q_{GR}^T Z_G Q_{GR})^{-1} [Z_R A(q_R) \\ &\quad + Q_{GR}^T Z_G A(Q_{GR} q_R + Q_{GJ} q_J)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

解軌跡を求めるには、(3.33)式を(3.32)式の \mathbf{q}_R^1 を初期値として積分すればよい。解軌跡の終端値 $\mathbf{q}_R(1.85)$ が、モデル1の求めるべき解である。この積分を、オイラー公式によって行えば、次式のような繰返し計算となる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_R^{k+1} &= \mathbf{q}_R^k - \frac{s^{k+1} - s^k}{s^k} (Z_R + Q_{GR}^T Z_G Q_{GR})^{-1} \\ &\quad \times [Z_R A(\mathbf{q}_R^k) + Q_{GR}^T Z_G A(Q_{GR} \mathbf{q}_R^k + Q_{GJ} \mathbf{q}_J)] \end{aligned} \right\} (3.34)$$

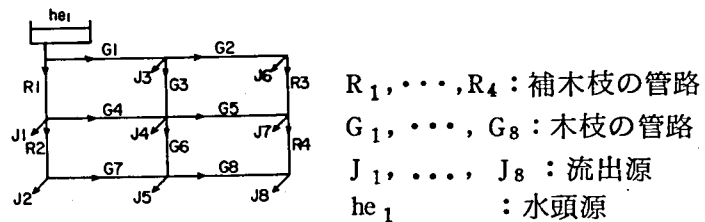
\mathbf{q}_R^1 : 既知, $k = 1, 2, \dots, N-1$

ここに、 $s^1=1.0$ 、 $s^N=1.85$ であり、ステップ数 N は適当に定める。

数値計算において、 $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{q}_R$ の逆行列計算が必要となるが、 Z_R 及び Z_G は対角行列であることから、このヤコビ行列 $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{q}_R$ は正定対称となり、コレスキー(Choleski)分解によって計算の効率化が可能である。

(計算例1)

第3.3図に示すような配水網の流量分布を求める問題を考えよう。このネットワークは、1個の配水池(水頭が h_{e1})、8個の需要流出点(定流出量 q_{J1}, \dots, q_{J8})、9個の節点、12本の管路で構成されている。管路のうち、 R_1, \dots, R_4 を補木の枝、 G_1, \dots, G_8 を木の枝とする。簡単のため、管路の抵抗係数の値 K_i ($i=R_1, \dots, R_4, G_1, \dots, G_8$)を全て1.0とし、また需要流出量は全て $q_{Ji}=0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ ($i=1, \dots, 8$)とする。モデル1に対する連続写像から得た解軌跡を(3.34)式に従って求め、その結果を第3.1表に示す。



第3.3図 配水管網の例(計算例1)

第3.1表 パラメータ s の変化による解の変化

(計算例1)

パラメータ s	流 量 解 [m^3/s]			
	Q_{R1}	Q_{R2}	Q_{R3}	Q_{R4}
1.00	0.400	0.160	0.060	0.050
1.05	0.400	0.160	0.060	0.050
1.10	0.400	0.160	0.060	0.050
1.15	0.400	0.159	0.059	0.050
1.20	0.400	0.159	0.059	0.050
1.25	0.400	0.159	0.059	0.050
1.30	0.400	0.159	0.059	0.050
1.35	0.400	0.159	0.059	0.050
1.40	0.400	0.158	0.058	0.050
1.45	0.400	0.158	0.058	0.050
1.50	0.400	0.158	0.058	0.050
1.55	0.400	0.158	0.058	0.050
1.60	0.400	0.158	0.058	0.050
1.65	0.400	0.158	0.057	0.050
1.70	0.400	0.157	0.057	0.050
1.75	0.400	0.157	0.057	0.050
1.80	0.400	0.157	0.057	0.050
1.85	0.400	0.157	0.057	0.050

ただし、 s の積分の増分幅は 0.05 としている。ここで、パラメータ $s = 1.85$ における解 q_{R1}, \dots, q_{R4} は原方程式 (3.17) 式に代入して、有効数字 3 桁まで正しいことが確認された。

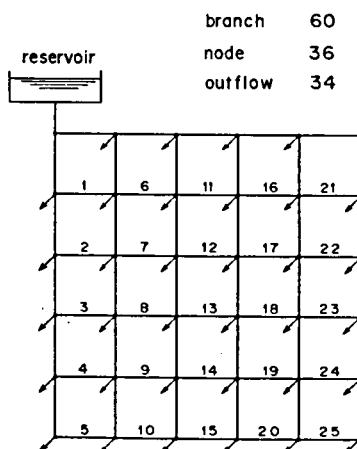
この例題の結果では、解 $q_R(s)$ が s の変化に対して余り変動していない。その理由は、このネットワークは定流出源であり、ネットワークを通して外部に流出する流量は一定である。例えば、枝 R_1 と G_1 の管路に流れる流量は各々の抵抗係数が等しく、かつ、流出流量の総和の $1/2 (=0.4 \text{ m}^3/\text{s})$ に等しい。これはパラメータ s の値が変化しても常に一定である。同様に枝 R_4 と G_8 も q_{J8} の $1/2$ の流量 $(=0.05 \text{ m}^3/\text{s})$ に常に等しい。一方、パラメータ s の影響を大きく受けるのは、水頭損失分であり、例えば、枝 R_2 の損失水頭は $s=1.0$ のとき、 $h_{R2}=0.160 \text{ m}$ であるが、 $s=1.85$ のとき $h_{R2}=0.032 \text{ m}$ である。すなわち、この計算例ではパラメータ s の変動に対して流量はそれ程変化しないが、水頭損失の変化は大きいことがわかる。

(計算例 2)

次に規模の大きい配水網の例を取り上げる。第 3.4 図に示すネットワークは、節点数 36、管路の枝の数 60 であり、定水頭源の配水池が 1 個、需要としての定流出源が 34 個である。補木枝として同図中 1～25 の管路を選び、その流量を独立変数として採用する。また、全ての管路の抵抗係数 K は 1.06 ((3.9) 式において、 $C_H=100$, $D=1 \text{ m}$, $\ell=500 \text{ m}$) とし、需要流量は 36 点全てについて $0.1 \text{ m}^3/\text{sec}$ とする。

例 1 と同様に、パラメータ s を $s \in [1.0, 1.85]$ に変化させて解 $q_R(s)$ を追跡する。第 3.2 表に、 $s=1.0$ のときの線形方程式の解 $q_R(1.0)$ と $s=1.85$ のときの解 $q_R(1.85)$ を示す。 s の積分ステップ幅は、 $0.85/20$ としている。

次に、システム方程式 (3.17) 式の解 $q_R(1.85)$ を求めるのに、ダビデンコの微分方程式を解く場合と、(3.17) 式を直接ニュートン・ラフソン法で解く場合とを、その数値計算量及び精度の面から比較してみよう。



(注) 番号付枝は補木枝を示す

第 3.4 図 配水管網の例 (計算例 2)

まず、ニュートン-ラフソン法によって、 $s=1.85$ に対する方程式 (3.17) 式の解 ($\mathbf{q}_R^{NR}(1.85)$; NR 解と呼ぶ) を次の繰返し計算によって求める。

$$\mathbf{q}_R^{p+1} = \mathbf{q}_R^p - \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}_R^p, 1.85)}{\partial \mathbf{q}_R} \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{q}_R^p, 1.85) \quad (3.35)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、収束判定は次式によって行う。

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, 1.85)\| < 10^{-6} \quad (3.36)$$

ただし、(3.36) 式は $\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, 1.85)$ のノルムを表し、 $\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, 1.85)$ は次式である。

第 3.2 表 解軌跡の初期値と終端値

(計算例 2)

補木枝番号	流 量 解 $[\text{m}^3/\text{s}]$	
	(s=1.0)	(s=1.85)
1	0.6414	0.6880
2	0.2801	0.2822
3	0.1402	0.1239
4	0.0818	0.0621
5	0.0596	0.0442
6	0.5887	0.6367
7	0.3389	0.3677
8	0.1990	0.1968
9	0.1272	0.1090
10	0.0970	0.0806
11	0.4253	0.4477
12	0.2877	0.3162
13	0.1896	0.1973
14	0.1311	0.1214
15	0.1043	0.0946
16	0.2628	0.2696
17	0.1971	0.2139
18	0.1408	0.1478
19	0.1031	0.0984
20	0.0848	0.0800
21	0.1173	0.1193
22	0.0970	0.1040
23	0.0734	0.0762
24	0.0558	0.0528
25	0.0469	0.0438

$$F(q_R, 1.85) = Z_R q_R + Q_{GR}^T Z_G (Q_{GR} q_R + Q_{GJ} q_J) \quad (3.36')$$

一方、ダビデンコの微分方程式を(3.34)式に従って解く場合には、パラメータ s の区間 $[1.0, 1.85]$ を N 分割して行う。このとき、 N の大きさによって計算時間及び $s = 1.85$ における解 $q_R^C(1.85)$ と、NR 解 $q_R^{NR}(1.85)$ との誤差がどのようなになるかを調べた。その結果を第 3.3 表に示す。ここで、誤差 ϵ_{q_R} は、解 $q_R^C(1.85)$ と解 $q_R^{NR}(1.85)$ に対して、

$$\epsilon_{q_R} = \frac{(q_R^C(1.85) - q_R^{NR}(1.85))^T (q_R^C(1.85) - q_R^{NR}(1.85))}{(q_R^{NR}(1.85))^T (q_R^{NR}(1.85))} \quad (3.37)$$

で定義している。ただし、表中で分割数 $N = 0$ は、 $s = 1.0$ のときの線形解 $q_R^C(1.0)$ を示し、この線形解を得るのに計算時間が 0.46 秒であり、 $q_R^C(1.0)$ と $q_R^{NR}(1.85)$ との誤差が 4.6 % であった。 $N > 1$ の場合の誤差 ϵ_{q_R} は全て、 $q_R^C(1.85)$ と $q_R^{NR}(1.85)$ との比較である。第 3.3 表に示すように、分割数 N を増加させてゆくと、誤差 ϵ_{q_R} は減少するが、計算時間はほぼ N に比例して増加する。

さて、(3.17) 式をニュートン-ラフソン法で直接解くと、その収束回数は初期値の選び方に依存する。例えば、第 3.3 表中下欄に示すように、初期値を全て 0.1 としたときには、5 回の繰返しで 2.22 秒の計算時間を必要とする。また、他の初期値の 1.0 及び 10.0 の場合でも、それ以上の収束回数を必要とした。一方、このニュートン-ラフソン法の初期値として、線形解 $q_R^C(1.0)$ を用いると、収束回数が 2 回で 0.97 秒の計算時間を得、この初期値 $q_R^C(1.0)$ を得るのに要する時間 0.46 秒を加えても、任意の初期値から解く場合よりも少ない計算時間で済むと言える。

第 3.3 表 連続写像法と N-R 法の比較

(計算例 2)

連 続 写 像 法		
積分間隔 N	C P U 時間 (秒)	$\varepsilon_{qR} (\%)$
0	0.46	4.6
1	0.91	0.99
2	1.35	0.48
3	1.84	0.32
4	2.34	0.24
5	2.65	0.19
10	4.96	0.10
15	7.00	0.07
20	9.40	0.05
30	13.95	0.03
40	18.45	0.03
50	23.11	0.02
ニュートン・ラフソン法		
初 期 値	収 束 回 数	C P U 時間 (秒)
all 0.1	5	2.22
all 1.0	8	3.56
all 10.0	11	4.82
solutions at s=1.0	2	0.97

(注1) 積分間隔 $N=0$ は, $s=1$ における線形解を求めることを意味する。

(注2) C P U 時間は VAX 11/780 によるものである。

3.4.3 抵抗係数に関する流量解析

管路の抵抗係数が増加する場合の流量及び圧力の変化の様子を連続的に知ることは、配水網のバルブ制御及びポンプ制御に対して、重要な情報を与えると考えられる。本節では、管路の抵抗特性の係数が増加する場合、配水網内の流量変化を連続写像法によって連続的に求め得ることを示そう。3.3.2節で述べたモデル2を対象とし、管路の抵抗特性の指数を $u = 1.85$ ，また流出枝の抵抗特性の指数を $u' = 2.0$ ^(28,67) とする。

管路の抵抗係数が増加するのを、次のように考える。例えば、第3.3図において、管路の抵抗係数 K_I （ただし、 I は枝集合 R, G, J のうち一つの部分集合を表す）の値が、 K_I^0 から K_I^1 に変化する場合、パラメータ s を導入して、抵抗係数 $K_I(s)$ を次式で定義する。

$$K_I(s) = (1-s)K_I^0 + sK_I^1 \quad (3.38)$$

$$s \in [0.0, 1.0], \quad I=R \text{ or } G \text{ or } J$$

すなわち、 $s = 0.0$ のとき、 $K_I(0) = K_I^0$ ， $s = 1.0$ のとき、 $K_I(1) = K_I^1$ となり、 s を 0.0 から 1.0 まで変化させると、抵抗係数 K_I は K_I^0 から K_I^1 に変化する。

さて、モデル2のシステム方程式(3.21)式は、変数 $\mathbf{x} = (\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J)$ 及びパラメータ s によって連続写像 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, s)$ として次式で表される。

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J; K_I(s)) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{q}_R \in R^\mu, \quad \mathbf{q}_J \in R^m, \quad s \in [0.0, 1.0], \quad I=R \text{ or } G \text{ or } J$$

ここに、 \mathbf{H} は $\mathbf{H} : R^{\mu+m} \times [0.0, 1.0] \rightarrow R^{\mu+m}$ なる写像である。

次に、この連続写像が3.2.1節で述べた正則条件を満たすことを確かめよう。ま

ず、(3.2.1) 式より明らかに、 $\mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J; K_I(s))$ は連続微分可能である。
また、(3.2.1) 式より、次のヤコビ行列を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J; K_I(s))}{\partial (\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J)} \\ &= \begin{bmatrix} uZ_R + uQ_{GR}^T Z_G Q_{GR}, & uQ_{GR}^T Z_G Q_{GJ} \\ uQ_{GJ}^T Z_G Q_{GR}, & uQ_{GJ}^T Z_G Q_{GJ} + u'Z_J \end{bmatrix} \quad (3.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_J; K_I(s))}{\partial s} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_R + Q_{GR}^T \mathcal{Q}_G Q_{GR}, & Q_{GR}^T \mathcal{Q}_G Q_{GJ} \\ Q_{GJ} + \mathcal{Q}_G Q_{GR}, & Q_{GJ}^T \mathcal{Q}_G Q_{GJ} + \mathcal{Q}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_J \end{bmatrix} \quad (3.41) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathcal{Q}_R, \mathcal{Q}_G, \mathcal{Q}_J$ は次の (i, i) 要素をもつ対角行列である。

$$\mathcal{Q}_{Iii} = (K_{Ii}^1 - K_{Ii}^0) |q_{Ii}|^{p-1} \quad (3.42)$$

$$I = R \text{ or } G \text{ or } J$$

上の $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{x}$ は $(\mu+m) \times (\mu+m)$ 行列、 $\partial \mathbf{H} / \partial s$ は $(\mu+m) \times 1$ 行列である。

さて、(3.40) 式において、 Z_G, Z_R, Z_J 及び u, u' は常に正であり、
また、対角ブロックの $Q_{GR}^T Z_G Q_{GR}$ 及び $uQ_{GJ}^T Z_G Q_{GJ}$ は正定対称行列である。
従って、ヤコビ行列 $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{x}$ の階数は $(\mu+m)$ である。また、 $s = 0.0$ 及び $s = 1.0$ におけるヤコビ行列 $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{x}$ の階数も明らかに $(\mu+m)$ である。

従って、(3.39)式で定義される連続写像 $H(x, s)$ は、連続微分可能かつ3.2.1節に述べた正則条件を満たすことが確かめられた。よって、[定理1]が成立し、解軌跡 $(q_R(s), q_J(s))$ は滑らかなパスであることが予想される。

一方、(3.39)式はネットワークの方程式(3.21)式そのものであり、また、(3.38)式のように抵抗係数は変化しても $K_I^0 > 0$ かつ $K_I^1 > 0$ であるから、その抵抗特性は(3.38)式より真に単調増加である。従って、3.4.1節に述べた[系1]及び[系2]が満たされ、任意の $K_I(s)$ 、 $s \in [0.0, 1.0]$ に対して解 (q_R, q_J) は唯一つ存在する。

以上から、(3.39)式で定義した連続写像 $H(x, s) = G(q_R, q_J; K_I(s))$ は、正則条件及び解の唯一存在性を満足することが確かめられ、次の定理を得る。

[定理4]

抵抗係数 $K(s)$ を変化させる連続写像(3.39)式によって得られる解軌跡 $(q_R(s), q_J(s))$ は、連続でかつ唯1本のパスである。

こうして、解軌跡は唯1本であることが確かめられた。解集合は、第3.1図(a)に示したようなパス S_0 1本のみよりなり、他のループ等は存在しないことがわかる。

次に、この解軌跡 $(q_R(s), q_J(s))$ を求める計算法について考えよう。 $G(q_R, q_J; K(s)) = 0$ を満足する解軌跡の上では、次のダビデンコの微分方程式が成立している。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(q_R, q_J)}{ds} &= - \left(\frac{\partial G(q_R, q_J; K_I(s))}{\partial (q_R, q_J)} \right)^{-1} \frac{\partial G(q_R, q_J; K_I(s))}{\partial s} \\ s &\in [0.0, 1.0] \\ q_R(0.0) &= q_R^0, \quad q_J(0.0) = q_J^0 \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

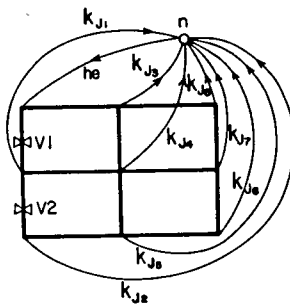
初期値 $q_R(0.0)$ 及び $q_J(0.0)$ は、抵抗係数が K_I^0 であるときの解で、既知とする。また、(3.43) 式中の $\partial G / \partial (q_R, q_J)$ 及び $\partial G / \partial s$ は、各々 (3.40) 式及び (3.41) 式で与えられる。

解軌跡を求めるには、(3.43) 式を (q_R^0, q_J^0) を初期値として積分すればよい。この積分をオイラー公式によって行えば、次式のような繰返し計算となる。

$$\left. \begin{aligned} (q_R, q_J)^{r+1} &= (q_R, q_J)^r \\ &- (s^{r+1} - s^r) \left(\frac{\partial G(q_R, q_J; K_I(s))}{\partial (q_R, q_J)} \right)^{-1} \frac{\partial G(q_R, q_J; K_I(s))}{\partial s} \\ (q_R, q_J)^0 &: \text{既知}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ s^0 &= 0.0, \quad s^N = 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

ステップ数 N は適当に定める。

ここで、解軌跡を求める場合に (3.43) 式で表される (q_R, q_J) の s に対する微分値、すなわち感度が大きいと、上に述べた単純なオイラー公式では、真の解軌跡からずれる可能性が生じる。そのような誤差を減少させるためには、オイラー公式の各ステップ r において、その解 $(q_R, q_J)^r |_{s=s^r}$ が元のシステム方程式 $G(q_R, q_J; K_I(s^r)) = 0$ を満足しているかを検証する。そして、その誤差が大きい場合には、 $G(q_R, q_J; K(s^r)) = 0$ を解くことによって、 $(q_R, q_J)^r$ を修正する手続きを取る必要がある。



V_1, V_2 : バルブ

K_{J1}, \dots, K_{J8} : 需要流出管路の抵抗係数

h_e : 水頭源水位

第 3.5 図 需要流出枝に抵抗を考慮した配水管網

(計算例 3)

配水管網に設けられたバルブの開度を変化させたとき、流量分布がどのように変化するかについて検討する。対象とするネットワークは計算例 1 と同様とするが、需要流出枝はすべて抵抗としてモデル 2 で考える。ネットワークのグラフは第 3.5 図に示すように、基準節点 n を付加し、 h_e を配水池水頭、 k_{J1}, \dots, k_{J8} を需要流出枝の管路抵抗係数、 V_1 と V_2 をバルブとする。バルブの特性は、2 乗特性で表す⁽²⁷⁾。バルブによる損失水頭を h_v 、バルブ開度の対応した抵抗係数を k_v とする。すなわち、

$$h_v = k_v |q|q \quad (3.45)$$

とする。バルブをもつ枝の管路の抵抗は、このバルブの抵抗係数に含めて考えることとする。このネットワークでは、未知変数は第 3.3 図のネットワークの未知変数 q_{R1}, \dots, q_{R4} と新たに加えた需要流出流量 q_{J1}, \dots, q_{J8} である。

さて、各枝の管路の抵抗係数を次のように与える。

$$k_{G1}^0, \dots, k_{G8}^0 = 1.0$$

$$k_{R3}^0, k_{R4}^0 = 1.0$$

$$k_{J1}^0, k_{J3}^0 = 7.0$$

$$k_{J2}^0, k_{J6}^0 = 4.65$$

$$k_{J5}^0, k_{J7}^0 = 4.27$$

$$k_{J4}^0 = 5.5, k_{J8}^0 = 4.0$$

$$k_{v1}^0, k_{v2}^0 = 1.0$$

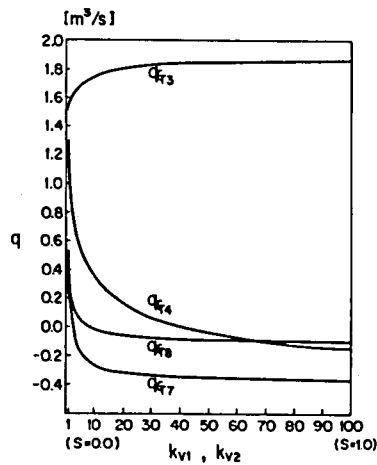
また、配水池水頭は $h_e = 2.0 \text{ m}$ とする。このときの流量解を第 3.4 表のケース A に示す。この解は、連続写像法の $s = 0$ における値、すなわち $K_I = K_I^0$ なる初期値である。需要流出流量 q_{J1}, \dots, q_{J8} はいずれも約 $0.9 \text{ m}^3/\text{s}$ である。

第 3.4 表 バルブ開度変化に伴う流量の変化
(計算例 3)

枝 番 号	流 量 [m^3/s]	
	ケース A ($s=0$)	ケース A' ($s=1$)
R 1	3.6 9	0.4 3
R 2	1.4 6	0.0 9
R 3	0.6 2	0.9 1
R 4	0.5 1	0.6 5
G 1	4.0 4	4.3 4
G 2	1.5 9	1.5 3
G 3	1.4 6	1.8 6
G 4	1.2 8	-0.1 5
G 5	0.8 7	0.3 6
G 6	0.9 1	0.7 7
G 7	0.5 1	-0.3 7
G 8	0.4 5	-0.1 1
J 1	0.9 5	0.5 0
J 2	0.9 5	0.4 6
J 3	0.9 8	0.8 4
J 4	0.9 7	0.5 9
J 5	0.9 6	0.5 1
J 6	0.9 8	0.7 2
J 7	0.9 7	0.6 1
J 8	0.9 6	0.5 4
全流出量	7.7 3	4.7 7

次に、バルブ V_1 の抵抗係数 k_{v1} を 1.0 から 100.0 に変化させる。すなわちバルブ開度を絞ったときの変化を調べてみる。(3.34)式に従って連続写像法で求めた $s = 1.0$ (すなわち $K_I = K_I^1$) における解の結果を第3.4表のケースA'に示す。積分ステップは 0.05 とした。ケースA'では、管路の枝 G4, G7 及び G8 に流向の逆転(流量が負)が見られる。また、需要流出流量は、ケースAに比較してばらつきが大きくなっている。総流出量はケースAでは $7.73 \text{ m}^3/\text{s}$ であったが、バルブの開度の絞りによって、ケースA'では $4.77 \text{ m}^3/\text{s}$ に減少している。

s を変化させたとき、その途中での流量の変化の状況を第3.6図に示す。バルブの操作につれて管路流量 q_{G4} , q_{G7} 及び q_{G8} が負となり、流向に逆転を生じる様子が連続的に観察できる。このような流向逆転は、実際の配水管網では赤水発生の原因となり、避ける必要があり、バルブ制御を実施する場合に注意する必要がある。この意味から、ケースA'のようなバルブ操作の適否を、連続写像法による解軌跡によって判断することができる。



第3.6図 バルブの開度変化に伴う流量の変化(計算例3)

なお、この計算例3では、第3.6図に示すように s が0.0～0.1の近辺、すなわち k_{v1}, k_{v2} の値が1.0から10.0の範囲で、 $dq_{G4}/ds, dq_{G7}/ds$ 及び dq_{G8}/ds が大きな値であるから、 s に対する感度が大きい。そこで、前述したように、オイラー公式の積分によって真の解軌跡からずれる可能性が高いため、パラメータ $s^r (r=0, 1, \dots, N-1)$ に対する真の解軌跡の点に修正する必要がある。ここでは、 $G(q_R, q_J; K_I(s^r))=0$ を直接ニュートン・ラフソン法で解き、軌跡を修正する手続きを取っている。

(計算例4)

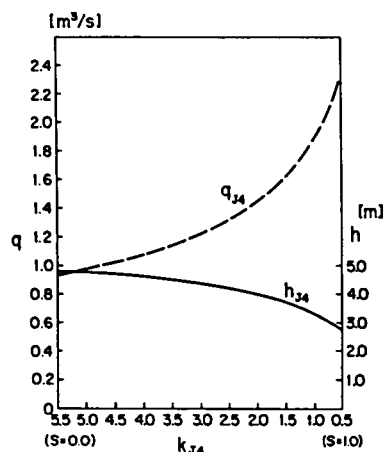
次に、需要端の流出枝の抵抗係数が変化した場合について検討する。配水網の初期状態は、計算例3と同様にケースAとする。この計算例4は、ある需要端で何らかの理由で(例えば、消火栓の使用や水道管の破裂)抵抗係数が大幅に減少した場合に相当する。このような場合、配水池の水位によって与えられる水頭が一定ならば、他の需要端で取出せる流量は、節点の圧力低下による影響を受けることが予想される。一例として、需要端 J_4 の抵抗係数が5.5の状態から0.5に変化した場合を考える。この場合には、前の計算例3と同様にして抵抗係数 k_{J4} を、

$$k_{J4}(s) = 5.5(1-s) + 0.5s \quad (3.46)$$

$$s \in [0, 1]$$

として与え、(3.34式)を解いて $s=0$ から $s=1$ に至る q_R, q_G, q_J の値を追跡して、流量変化を連続的に知ることができる。第3.7図に、 q_{J4} 及び水頭 h_{J4} の値の変化の様子を示す。抵抗係数が減少した枝 J_4 の流量 q_{J4} は $0.97 \text{ m}^3/\text{s}$ から $2.38 \text{ m}^3/\text{s}$ に増加する。一方、その需要流出枝がでている節点の水頭 h_{J4} は、 4.8 m から 2.8 m に減少する。また、全ての管路の流量変化を第3.5表のケースA''に示す。枝 J_4 以外の需要流出量は、いずれも初期状態(ケースAに比較して減少している。また、管路流量 $q_{R1}, \dots, q_{R4}, q_{G1}, \dots, q_{G8}$

は k_{J4} の変化の影響を受けて変動していることがわかる。総流出量は $7.73 \text{ m}^3/\text{s}$ から $8.09 \text{ m}^3/\text{s}$ に増加している。



第 3.7 図 需要流出枝の抵抗係数変化に伴う水頭及び流量の変化
(計算例 4)

このように、需要端負荷の抵抗係数が変化した場合、配水管網内に流れる流量への影響、あるいは節点水頭への影響を連続写像法によって知り得ることが明らかとなった。なお、本節では 1 本の管路あるいは 1 本の流出枝の抵抗係数の変化の影響について述べたが、複数の管路及び流出枝の抵抗係数が変化しても、(3.38) 式の $K_I(s)$ をベクトル化すれば、全く同様に解析することが可能である。

3.5 数値積分に関する検討

連続写像法では、ダビデンコの微分方程式を導いて、これをパラメータ s の変化に従って積分する手続きが必要である。この積分法として、本章では最も簡単なオイラー公式を用いたが、他の数値積分の方法として R K G 法を用いた場合の精度について比較しよう。解くべき次数 n の方程式を $f_i(x) = 0$ としたとき、数値積分で得た解 x が方程式を満す度合を次の誤差 ϵ_f で定義する。

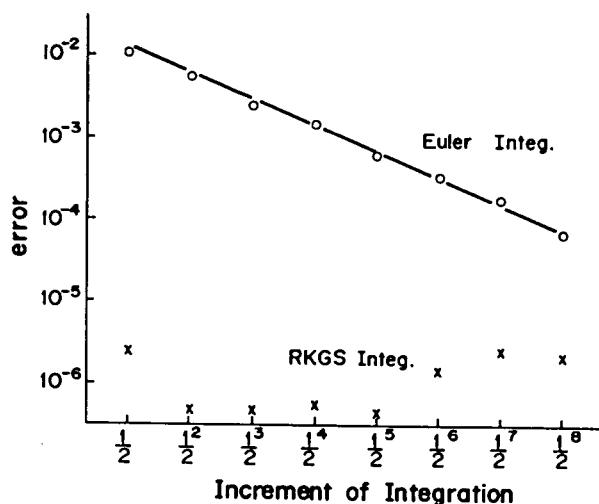
第 3.5 表 需要流出枝の抵抗係数変化に伴う流量の変化
(計算例 4)

枝 番 号	流 量 [m^3/s]	
	ケース A (s = 0)	ケース A'' (s = 1)
R1	3.6 9	3.8 6
R2	1.4 6	1.4 5
R3	0.6 2	0.7 7
R4	0.5 1	0.4 2
G1	4.0 4	4.2 3
G2	1.5 9	1.6 0
G3	1.4 6	1.7 4
G4	1.2 8	1.5 6
G5	0.8 7	0.4 3
G6	0.9 1	0.4 9
G7	0.5 1	0.6 4
G8	0.4 5	0.3 6
J1	0.9 5	0.8 5
J2	0.9 5	0.8 0
J3	0.9 8	0.8 9
J4	0.9 7	2.3 8
J5	0.9 6	0.7 7
J6	0.9 8	0.8 3
J7	0.9 7	0.7 8
J8	0.9 6	0.7 8
全流出量	7.7 3	8.0 9

$$\epsilon_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i(x)| \quad (3.47)$$

ここに， x は独立変数， n は x の次数とする。例えば，計算例 2 では， $x=q_R$ ， $n=\mu$ で， $f_i(x)$ ($i=1, \dots, n$) は $F(q_R, 1.85)$ である。

計算例 2 において，積分ステップ幅を区間 $[1.0, 1.85]$ の $1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^8$ としたとき，オイラー公式による積分で得た解 $q_R(1.85)$ の誤差 ϵ_f を第 3.8 図に示す。よく知られているように，オイラー公式の収束は 1 次のオーダーであり，ステップ幅の減少に伴って，その誤差は線形に減少している。



第 3.8 図 オイラー公式及び R K G 法による積分誤差
 (積分ステップ幅は区間 $[1.0, 1.85]$
 の $1/2, (1/2)^2, \dots, (1/2)^8$ である。
 (計算例 2))

一方，R K G 法 (IBM-SSP) では，ステップ幅はプログラム中で可変ではあるが， 10^{-5} 以下の許容範囲に入った。R K G 法の収束は 4 次のオーダーであり，積分計算の収束速度は速い。単純なオイラー公式による解の誤差は，たかだか 10^{-4} であった。

実際の配水管網の解析に際して、どの積分方法を採用するかは問題にもよるが、単純なネットワークならば、オイラー公式による誤差は、それ程大きくならないと考えられる。また、現実の配水管網では、管路の抵抗係数や特性を厳密に知ることは、計測費用や立地上の問題から容易ではない作業である。この点からも、R K G法を用いて高精度に解を求める必要は現実には余りなく、流量や水頭の値の有効数字は、たかだか3桁で十分であると考えられる。

積分の方法として、オイラー公式を採用するとしても、その誤差を減少させることは、工学上必要であると考えられる。その場合には、真の解軌跡からのずれを修正する必要がある。実際、計算例3では、オイラー公式の積分ステップ r におけるパラメータ s^r に対して、真の解を求める手続きによって、真の解軌跡への修正を施している。

なお、解軌跡を厳密に追跡する方法については、不動点アルゴリズムの研究⁽³²⁾で詳細に論じられており、本章では実際の応用における誤差評価に止める。

3.6 結 言

本章は、配水管網の解析に連続写像法が適用できることを論じた。まず、非線形代数方程式を解くための連続写像と、その正則条件について述べた。次に、解析の目的に従って、二つのモデルを提案し、それらのシステム方程式を導いた。モデル1は需要流出量を一定とした定流出源モデルである。モデル1によって、配水管網の流量分布を求めるのに、連続写像法を適用した。一方、モデル2は、需要端流出枝に抵抗を与えたものであり、配水管網のある部分の管路抵抗が変化した場合の流量の変化を求めるのに、連続写像を適用した。

本章で得た結論は、次の四点である。

(I) モデル1及びモデル2のシステム方程式を用いて定義した連続写像は、いずれも正則条件を満足する。また、配水網のシステム方程式にはいずれのモデルにおいても、唯一つの解が存在することが確かめられた。従って、連続写像によって求められる解軌跡は、唯1本の連続なパスであることが明らかとなった。

(II) モデル1に対する連続写像は、システム方程式が、パラメータの変化に従

って、線形方程式から非線形方程式へ変形するように定義した。この連続写像は、非線形である管路の摩擦損失水頭特性が、そのパラメータをある値に仮定すると、線形の特性となることに着目している。解軌跡はダビデンコの微分方程式を解くことによって求め、オイラー公式を適用した。更に、解くべき非線形のシステム方程式をニュートン・ラフソン法で直接解いた場合との比較を、計算例を用いて行った。その結果、計算精度及び計算時間の両面から見て、連続写像から導かれるダビデンコの微分方程式を数値積分によって解き、更に精度が必要な場合に、ニュートン・ラフソン法を併用するのが、実際的であることが明らかとなった。

Ⅲ モデル 2 に対する連続写像では、配水管網のある部分の管路の抵抗係数が変化する場合、その抵抗係数を連続写像のパラメータの関数として定義した。システム方程式から、ダビデンコの微分方程式を導き、解軌跡を求めた。そして、この解軌跡が抵抗係数の変化に伴う配水管網の流量の変化を表し、しかも抵抗係数の変化に対して、連続的に解が求められることが明らかとなった。

Ⅳ 連続写像によって生成される解軌跡は、ダビデンコの微分方程式によって表される。その数値積分として R K G 法を用いるよりも、単純なオイラー公式を用いることで十分である。ただし、その場合パラメータの値によって解に誤差が生じるならば、真の解軌跡への修正の手続きを行う必要がある。

以上から、配水管網の解析に連続写像法が適用できること、その解軌跡は唯一つに定まって、ダビデンコの微分方程式を解くことで、パラメータの変化に対する解の変化の様子を連続的に求められることが明らかとなった。

第4章 地域および時間分割による送水運用 計画の最適化

4.1 序 言

近年、上水道系の規模が拡大して、その運用計画及び制御の必要性が高まるにつれて、電子計算機の導入による総合管理システムの高度化に重点が置かれてきている^(38,39,59,63,64)。このような上水道系におけるシステム化技術の開発には、数理計画法や最適制御手法の積極的な導入が図られてきており、そのための多くの研究が積重ねられてきた^(20,31,56,58)。特に、送配水の運用計画やスケジューリングに関して、その傾向が顕著である。例えば、双対分解法による方法^(6,11,12)、システムの輸送遅れを考慮した方法⁽⁵³⁾、双対線形計画法による流量・圧力配分の最適化⁽²⁵⁾などがある。これらに共通した点は、問題の規模が大きくなるにつれて、実用的な計算速度および実用的な計算機記憶容量を実現することにあると考えられる。

本章では、最適化計算を簡略化する手段として、二重分割法を送水運用計画問題に適用し、分割の方法および繰返し計算の手順について論じようとするものである^(16,17)。

まず、4.2節では非線形計画問題において、変数の分割の仕方を二通り考えて、原問題を二種類の問題に分割する二重分割法^(37,40)について説明する。そして、送水運用計画問題では、時間に関する分割と地域に関する分割の二通りの分割が可能であることを示す。

次に、4.3節では、複数の地域が結合した上水道系において、地域間の結合である融通水量を固定して、地域毎に最適化を行う地域分割と、時間帯の間の関係を見捨て、時間帯毎に独立に全地域の最適化を行う時間分割を定式化する。更に、分割された個々の部分問題は2レベル法⁽⁶⁸⁾によって効率よく解かれることを示す。従来、時間分割した問題のみを解く準最適方法⁽³⁸⁾、あるいは、階層化して協調問題を解く方法⁽³¹⁾に止まっていたが、分割を二重に施すことにより、小さな規模の部分問題に分割され、また、最適条件の方程式から部分問題の求解

が容易になることを示す。

最後に、4.4節では、5地域からなる送配水系統における運用計画問題について、その計算例を示し、従来の最適化手法と比較検討を行う。

4.2 二重分割法^{(37),(40)}

4.2.1 非線形計画問題の二重分割

非線形計画問題に対する二重分割とは、変数に関しての分割の仕方を二通り考え、その二通りに分割した問題を交互に解くことによって、全体の最適解を求めようとするものである。線形制約条件をもつ非線形計画問題を次のように表す。

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

$$\text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad (4.2)$$

ここに、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ で f は微分可能な凸関数、 A は制約を表す $p \times n$ 行列、 \mathbf{c} は $p \times 1$ 定数ベクトルである。

まず、ベクトル \mathbf{x} の要素の順番を次の二通りに並べ替える。

$$\mathbf{x}_\alpha = P_\alpha \mathbf{x} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}_\beta = P_\beta \mathbf{x} \quad (4.4)$$

ただし、 $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$ 、 $\mathbf{x}_\beta \in \mathbb{R}^n$ で、 P_α 及び P_β は $n \times n$ の正則な置換行列である。この並べ替えによって、 \mathbf{x}_α では n_α 個のサブシステムに、 \mathbf{x}_β では n_β 個のサブシステムにグループ化できるとしよう。すなわち、

$$\mathbf{x}_\alpha = (\mathbf{x}_{\alpha 1}^T, \mathbf{x}_{\alpha 2}^T, \dots, \mathbf{x}_{\alpha n_\alpha}^T)^T \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}_\beta = (\mathbf{x}_{\beta 1}^T, \mathbf{x}_{\beta 2}^T, \dots, \mathbf{x}_{\beta n_\beta}^T)^T \quad (4.6)$$

と表されるところ。ここに、 T は転置を表し、 $\mathbf{x}_{\alpha i} \in R^{m_{\alpha i}} (\sum_i m_{\alpha i} = n)$ 及び $\mathbf{x}_{\beta i} \in R^{m_{\beta i}} (\sum_i m_{\beta i} = n)$ である。

次に、制約条件について考えよう。(4.2)式と(4.3)式から

$$A P_{\alpha}^{-1} \mathbf{x}_{\alpha} = \mathbf{c} \quad (4.7)$$

を得るが、係数行列 $A P_{\alpha}^{-1}$ を(4.5)式の \mathbf{x}_{α} のサブシステム毎にブロック化するように置換し、その $p \times p$ 置換行列を Q_{α} とする。

そうすれば、(4.7)式が

$$Q_{\alpha} A P_{\alpha}^{-1} \mathbf{x}_{\alpha} = Q_{\alpha} \mathbf{c} \quad (4.8)$$

と変形される。 $A_{\alpha} = Q_{\alpha} A P_{\alpha}^{-1}$ 及び $\mathbf{c}_{\alpha} = Q_{\alpha} \mathbf{c}$ とおけば、(4.8)式は

$$A_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} = \mathbf{c}_{\alpha} \quad (4.9)$$

と書き表される。ここに、 A_{α} は $p \times n$ 行列、 \mathbf{c}_{α} は $p \times 1$ 行列であり、(4.9)式は原制約式の(4.2)式の係数行列 A を A_{α} に、変数 \mathbf{x} を \mathbf{x}_{α} に、定数ベクトル \mathbf{c} を \mathbf{c}_{α} に並べ替えたものであることは明らかである。

さて、(4.9)式をサブシステム α_i 毎に分割して考える。すなわち、(4.9)式を $\mathbf{x}_{\alpha i}$ とそれ以外の変数の部分に分割して、

$$B_{\alpha i} \mathbf{x}_{\alpha i} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n_{\alpha}} G_{\alpha i j} \mathbf{z}_{\alpha j} = \mathbf{c}_{\alpha i}, \quad i=1, \dots, n_{\alpha} \quad (4.10)$$

$$H_{\alpha i} \mathbf{x}_{\alpha i} = \mathbf{z}_{\alpha i} \quad (4.11)$$

と表す。ここに、 $B_{\alpha i}$ は A_{α} の中で、サブシステム α_i の変数 $\mathbf{x}_{\alpha i}$ に関する $p_{\alpha i} \times m_{\alpha i}$ 部分行列、 $H_{\alpha i}$ は $\mathbf{x}_{\alpha i}$ の要素中で、他のサブシステムへ干渉する

要素を定める $q_{\alpha i} \times m_{\alpha i}$ 部分行列, $z_{\alpha i}$ は $q_{\alpha i} \times 1$ ベクトルである。 $q_{\alpha i}$ は, 他のサブシステムと干渉するベクトルの次数である。また, $G_{\alpha i j}$ はサブシステム α_i に, 他のサブシステム α_j ($j \neq i$) が干渉するベクトル $z_{\alpha j}$ に対する $p_{\alpha i} \times q_{\alpha j}$ 部分行列である。

(4.10) 式を $i = 1, \dots, n_{\alpha}$ について表せば,

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} B_{\alpha 1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & B_{\alpha n_{\alpha}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, G_{\alpha 12}, \dots, G_{\alpha 1 n_{\alpha}} \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ G_{\alpha n_{\alpha} 1}, \dots, & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\alpha 1} & 0 \\ & H_{\alpha 2} \\ & & \ddots \\ 0 & & & H_{\alpha n_{\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$\triangleq B_{\alpha} + G_{\alpha} H_{\alpha} \quad (4.12)$$

となる。 B_{α} は $p \times n$ 行列, G_{α} は $p \times q_{\alpha}$ 行列, H_{α} は $q_{\alpha} \times n$ 行列である。

ただし, $q_{\alpha} = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} q_{\alpha i}$ である。

(4.12) 式による表現は, 係数行列 A_{α} をサブシステム毎にブロック化したとき, 対角成分が B_{α} で, 非対角成分が $G_{\alpha} H_{\alpha}$ であることを示している。

この (4.12) 式の右辺第2項において,

$$H_{\alpha} x_{\alpha} = z_{\alpha}$$

とすると, もし, z_{α} を一定値に固定した場合, (4.9) 式は

$$A_{\alpha} x_{\alpha} = B_{\alpha} x_{\alpha} + G_{\alpha} z_{\alpha} = c_{\alpha}$$

となり, 制約条件は B_{α} に関してブロック毎に分割されることがわかる。すなわち, 行列 H_{α} は変数 x_{α} の成分の中のあるベクトルを固定化するものであり, これによって制約条件が分割されるのである。

同様にして、(4.6)式の x_β についても

$$A_\beta = Q_\beta A P_\beta^{-1}, \quad c_\beta = Q_\beta c$$

と置換する行列 Q_β によって A_β は、

$$A_\beta = B_\beta + G_\beta H_\beta \quad (4.13)$$

と分割して表現されることがわかる。ここに、 B_β は $p \times n$ 行列、 G_β は $p \times q_\beta$ 行列、 H_β は $q_\beta \times n$ 行列である。

(4.5)式の x_α のように、変数を並べ替えて n_α 個のサブシステムに分割する仕方を α 分割と呼び、一方、(4.6)式の x_β のように、変数を n_β 個のサブシステムに分割する仕方を β 分割と呼ぶことにする。

従って、 α 分割における最適化は次式で表される。

$$\min_{x_\alpha} f(x_\alpha; z_\alpha) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} f_{\alpha i}(x_{\alpha i}; z_\alpha) \quad (4.14)$$

s. t.

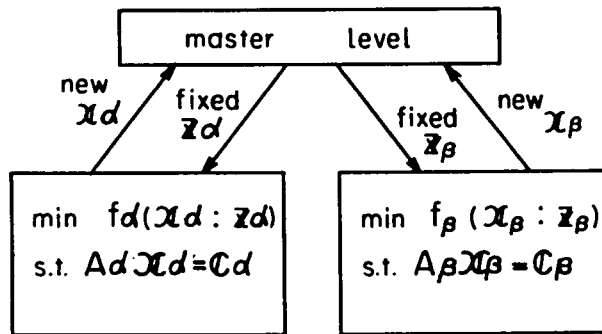
$$\left. \begin{aligned} B_{\alpha i} x_{\alpha i} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n_\alpha} G_{\alpha i j} z_{\alpha j} &= c_{\alpha i}, \quad i=1, \dots, n_\alpha \\ H_{\alpha i} x_{\alpha i} &= z_{\alpha i} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

同様にして、 β 分割における最適化は次式で表される。

$$\min_{x_\beta} f(x_\beta; z_\beta) = \sum_{i=1}^{n_\beta} f_{\beta i}(x_{\beta i}; z_\beta) \quad (4.16)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{s. t.} \\
 B_{\beta i} x_{\beta i} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n_{\beta}} G_{\beta i j} z_{\beta j} = c_{\beta i} \quad , \quad i=1, \dots, n_{\beta} \\
 H_{\beta i} x_{\beta i} = z_{\beta i}
 \end{array} \right\} (4.17)$$

このようにして、原問題を α 分割及び β 分割の二通りに分割したうえで、最適化計算は(4.14)式及び(4.15)式の α 分割による問題の最適化と、(4.16)式及び(4.17)式の β 分割による問題の最適化とを交互に繰返して行うことにする。第4.1図にその繰返し計算の過程を示す。



第4.1図 最適化問題の二重分割法

そして、繰返し計算は次のステップに従って行う。

(ステップ1) 実行可能な初期値 $x_{\beta}^{(0)}$ を適当に与え、 $k=1$ としてステップ2へ進む。

(ステップ2) マスターレベルにおいて、まず定数 $z_{\alpha}^{(k)}$ を次式によって定める。

$$z_{\alpha}^{(k)} = H_{\alpha} P_{\alpha} P_{\beta}^{-1} x_{\beta}^{(k-1)}$$

次に、部分最適化レベルにおいて、 $\mathbf{z}_\alpha^{(k)}$ を固定して \mathbf{x}_α に関する最適化問題
 (4.14) 式及び (4.15) 式を解き、その解を $\mathbf{x}_\alpha^{(k)}$ とする。

(ステップ3) 再び、マスターレベルにおいて、定数 $\mathbf{z}_\beta^{(k)}$ を

$$\mathbf{z}_\beta^{(k)} = \mathbf{H}_\beta \mathbf{P}_\beta \mathbf{P}_\alpha^{-1} \mathbf{x}_\alpha^{(k)}$$

によって定めたのち、部分最適化レベルにおいて、 $\mathbf{z}_\beta^{(k)}$ を固定して \mathbf{x}_β に関する最適化問題 (4.16) 式及び (4.17) 式を解き、その解を $\mathbf{x}_\beta^{(k)}$ とする。

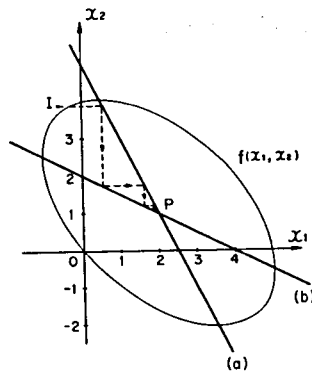
(ステップ4) マスターレベルにおいて、目的関数の改善評価を行い、十分小さな数 ϵ に対して

$$\left. \begin{array}{l} |f_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{(k)}, \mathbf{z}_\alpha^{(k)}) - f_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{(k-1)}, \mathbf{z}_\alpha^{(k-1)})| < \epsilon \\ \text{かつ} \\ |f_\beta(\mathbf{x}_\beta^{(k)}, \mathbf{z}_\beta^{(k)}) - f_\beta(\mathbf{x}_\beta^{(k-1)}, \mathbf{z}_\beta^{(k-1)})| < \epsilon \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

ならば、最適解に達したとして停止する。(4.18) 式が成立たなければ、 k を進めステップ2に戻る。

この分割法を次の簡単な例によって説明しよう。 x_1 と x_2 を変数とする次の制約条件無し の最小化問題を考える。

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 \quad (4.19)$$



第4.2図 二重分割法による収束過程の例

このとき、次の二つの部分最適化問題を定義する。

$$\left. \begin{array}{l} \min_{x_1} f_{\alpha}(x_1; z_1) = x_1^2 + z_1 x_1 - 5x_1 \\ \text{ただし, } z_1 = x_2 \text{ として固定} \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \min_{x_2} f_{\beta}(x_2; z_2) = x_2^2 + z_2 x_2 - 4x_2 \\ \text{ただし, } z_2 = x_1 \text{ として固定} \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

すなわち、(4.20)式において、まず x_2 を定数 z_1 として固定し、 x_1 を決定変数とする最小化問題を解く。次に x_1 を z_2 として固定して、(4.21)式の最小化問題を解き、 x_2 を求める。これを繰返すと、例えば、第4.2図の初期点Iから破線の軌跡をたどって、最適点Pに収束することがわかる。なお、図中の直線(a), (b)は、各々(4.20)式、(4.21)式の停留条件

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 5 = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \quad (4.23)$$

を示している。なお、この例題では、制約条件はないので、(4.8)式及び(4.9)式において、 A_{α} , A_{β} 及び c_{α} , c_{β} は零行列及び零ベクトルである。

次に、二重分割による繰返し最適化計算の収束性について述べよう。原問題(4.1)式及び(4.2)式が最適解をもつならば、この二重分割法による繰返し計算も最適解に到達する。その十分条件は、文献(38)に従えば、次式で与えられる。

$$N[A] = N \left[\begin{array}{c} A \\ H_{\alpha} P_{\alpha} \end{array} \right] \oplus N \left[\begin{array}{c} A \\ H_{\beta} P_{\beta} \end{array} \right] \quad (4.24)$$

ここに、 $N[\cdot]$ は零空間を、 \oplus は直和を示す。そして、(4.24)式が成立するための必要条件として、次の不等式が与えられている。

$$n - p \geq q_\alpha + q_\beta \quad (4.25)$$

ここに、 q_α は $q_\alpha \times n$ 行列 H_α の階数、 q_β は $q_\beta \times n$ 行列 H_β の階数で、 $n - p$ は $p \times n$ 行列 A の零度である。 q_α は、 α 分割において、部分システム間で干渉結合する変数の個数であり、また、 q_β は、 β 分割において、部分システム間で干渉結合する変数の個数である。(4.25)式は、 α 分割及び β 分割の各々における結合変数の個数、すなわち、各々の分割において定数として固定化される変数の個数に対する上限値を与えている。(4.12)式あるいは(4.13)式から H_α 及び H_β は各々、変数 x_α 及び x_β の中の固定化する変数を指定するものであった。すなわち、 $z_\alpha = H_\alpha x_\alpha$ および $z_\beta = H_\beta x_\beta$ は α 分割および β 分割において定数であり、これによって原問題が分割される。このことから、(4.24)式を見れば次のことがわかる。すなわち、 $N[A]$ は、原問題における制約集合 $Ax = c$ の上の最適解の点における接平面であるとする。一方、ある変数を固定すると、その接平面には拘束が加えられるが、その一つが $z_\alpha = H_\alpha x_\alpha = H_\alpha P_\alpha x$ による拘束であり、他の一つが $H_\beta P_\beta x$ による拘束である。原問題と分割した問題が制約集合 $Ax = c$ 上の最適点で同一の接平面をもてば、分割した問題を解くことによって得られる解は、原問題の解に収束する(十分条件)。以上から(4.24)式は、分割によって原問題の制約集合の張る零空間を狭めてはならないことを意味している。

しかし、(4.24)式は十分条件であり、また、(4.25)式は(4.24)式が成立するための必要条件である。収束条件が十分条件で与えられているので、(4.24)式が満足されなくても繰返し計算が収束する可能性は残されている。また、最適化問題を解く場合に、(4.24)式は実際に成立しているか否かを検討するのに便利な表現ではない。しかし、(4.25)式は部分システム間で干渉している結合変数の個数を調べることによって簡単に判定でき、(4.24)式が

成立つかどうかの目安を与える。そこで、次節で述べる送水運用計画問題では、その計算例に関する収束性について、(4.2.5)式が成立しているかどうかを検討することに止めた。後述するように、実際に得られた計算結果は、すべての場合についてこの繰返し計算は収束し、満足すべき解が得られた。

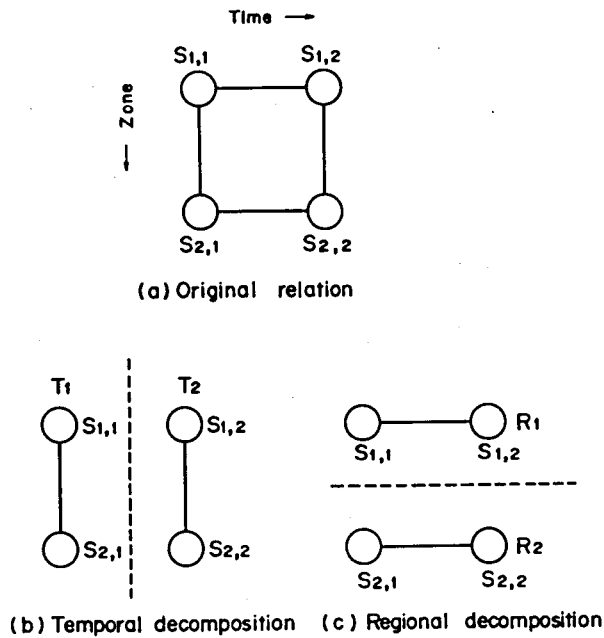
4.2.2 送水運用計画の二重分割

幾つかの地域が結合した形態をもつ送配水系統において、ある期間中のスケジューリング問題について考えよう。送配水系統運用問題の定式化は、次節に詳しく述べることにして、ここでは二重分割法がどのように適用されるのか、その概略を述べる。

送配水系統はいくつかの地域からなり、その地域間は相互に水を融通し合うとする。また、時間については、ある時間帯毎に離散的に考えるとする。このことから、スケジューリング問題は地域毎に分割するのと、時間帯(以下、期間と呼ぶ)毎に分割するのと、二通りの可能性がある。

第4.3図は、2地域、2期間の状態量 S_{ij} の関係を示している。ここに、添字 i は地域、 j は期間を示す。状態量 S_{ij} は各期間断面で地域的結合関係をもっている。一方、各地域毎の断面でみると、時間的結合関係をもっている。このような2種の結合関係は、例えば製品の生産スケジューリングや、在庫管理問題などのスケジューリング問題によくみられる構造である。さて、始めに時間の結合関係を切断する、すなわち、寄与する状態量を固定すれば、第4.3図(b)に示すように、 $S_{1,1}$ と $S_{2,1}$ 、 $S_{1,2}$ と $S_{2,2}$ の2つの独立な部分システムに分割され、各々を T_1 、 T_2 とする。これを時間分割と呼ぶ。例えば、 $S_{1,1}$ は次の期間の状態 $S_{1,2}$ に影響を与えるが、 T_2 の部分システムでは、 $S_{1,1}$ をある値に固定して考えるのである。

一方、地域的な結合関係を切断すると、第4.3図(c)のように各地域毎に期間の関係のみに着目した2つの独立な部分システム R_1 と R_2 に分割され、これを地域分割と呼ぶ。たとえば、部分システム R_1 に対しては、 $S_{2,1}$ と $S_{2,2}$ の状態量はある値に固定されることになる。



第 4.3 図 地域－時間分割による送水運用計画問題の二重分割

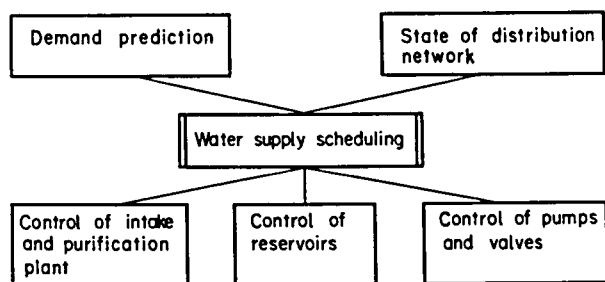
4.3 時間－地域の二重分割による送水運用計画問題

上水道系では、全体を幾つかの地域にブロック化して扱い、各地域で取水・浄水・配水を行って水の適正な配分を行う。地域間では水の融通を行って需要量を満し、かつポンプの運転費用を下げるように運用される。

本節では、まず送水運用計画問題を数理計画問題として定式化し、次に二重分割法がどのように適用されるかを示そう。

4.3.1 運用計画問題の定式化

上水道系の計画・制御問題は、第 4.4 図に示すような構成となっている。需要量の日間の予測と、対象とする配水網の状況に応じて運用計画問題が設定される。運用計画の段階では、取水量、配水池貯水量、地域間の融通水量のスケジュールを決定する。この決定に従って、地域内では取水量制御、浄水プラントの制御、配水池制御、ポンプ・バルブによる圧力制御などの更に細かいオンライン制御を

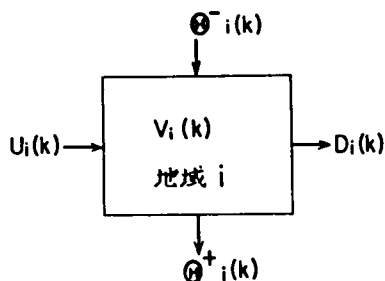


第 4.4 図 水輸送システムの送水運用計画

行う。

規模の大きな配水系統では，このようにスケジューリングと制御を分離して行い，また，そのスケジューリング問題は地域を一つの単位として扱うことにより，計画問題の簡略化が図られる。

さて，地域 i に付随する変数を第 4.5 図に定義する。すなわち， $V_i(k)$ は貯水量， $U_i(k)$ は取水量， $D_i(k)$ は需要量， $\theta_i^-(k)$ は他地域からの融通受水量， $\theta_i^+(k)$ は他地域への融通送水量である。ただし，需要水量については，別の予測方法によって得られたものとし，ここでは既知とする。変数の添字 i ($= 1, \dots, N$) は地域番号を，また k ($= 1, \dots, M$) は期間を示す。各地域における配水池の水収支式は次式で与えられる。



第 4.5 図 地域 i に属する変数

$$V_i(k) = V_i(k-1) + U_i(k) - D_i(k) + \theta_i^-(k) - \theta_i^+(k) \quad (4.26)$$

$$i = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, M$$

他地域への融通送水量 $\theta_i^+(k)$ は複数の他地域 j に送水する量 $\sigma_{ij}(k)$ ($j \in O_i$) の総和として定義する。

$$\theta_i^+(k) = \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k)$$

ここに、 O_i は、 i 地域から送ることができる地域の番号の集合である。同様に、受水する水量 $\theta_i^-(k)$ は、複数の地域から送水される量 $\sigma_{ji}(k)$ ($j \in I_i$) の総和として

$$\theta_i^-(k) = \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k)$$

と表される。ここに、 I_i は i 地域へ送ることができる地域の番号の集合である。 $\sigma_{ij}(k)$ は、その流向を指定して、 I_i, O_i を定義するが、値そのものは正負いずれも取り得るものとする。(4.26) 式の等式制約条件を $g_i(k)$ で表しておく。すなわち、

$$\begin{aligned} g_i(k) &= V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k) + D_i(k) - \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k) + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

とする。

送水系の運用上、変数 U_i, V_i, σ_{ij} は、各々その上下限制約があり、次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} U_i^{\min} &\leq U_i(k) \leq U_i^{\max} \\ V_i^{\min} &\leq V_i(k) \leq V_i^{\max} \\ \sigma_{ij}^{\min} &\leq \sigma_{ij}(k) \leq \sigma_{ij}^{\max} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

$$(i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M)$$

次に目的関数は、次の $C_{ik}^1, \dots, C_{ik}^4$ の4つのコストを考える。まず、取水した原水の浄化コスト及び他の上水道系からの上水の買入れコストを考え、

$$C_{ik}^1 = W_{1i} U_i(k)$$

とする。ここに、 W_{1i} は単位水量あたりのコストを表す重み係数である。

地域間の融通には送水ポンプの動力費を考え、

$$C_{ik}^2 = \frac{1}{2} W_{2i} \sigma_{ij}^2(k), \quad j \in O_i$$

とする。 W_{2i} は、流量に対する動力費を表す重み係数である。

次に、浄水プロセスでは水量の急激な変化を避けることが望ましく、時間的変化に対するペナルティを与え、

$$C_{ik}^3 = \frac{1}{2} W_{3i} \{U_i(k) - U_i(k-1)\}^2$$

とする。ここに、 W_{3i} は重み係数である。

更に、配水池の貯水量は事故等の緊急予備としてできるだけ多く貯留していることが望ましい。そこで最大容量に近づけるようにペナルティを与える。すなわち、

$$C_{ik}^4 = \frac{1}{2} W_{4i}(k) \{V_i^{\max} - V_i(k)\}^2$$

とし、 $W_{4i}(k)$ は重み係数である。

以上の4つのコスト及びペナルティについて、N地域、M期間までの和の形式で目的関数を設定する。

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M (C_{ik}^1 + C_{ik}^2 + C_{ik}^3 + C_{ik}^4) \quad (4.29)$$

また、重み W_{3i} , W_{4i} は W_{1i} , W_{2i} のように実際の経済コストではないため、得られた解が実際の運用に照らして意味のあるように決める。

よって、全体の最適運用計画問題は等式制約条件付で、決定変数を $U_i(k)$, $V_i(k)$, $\sigma_{ij}(k)$ として次のように表される。

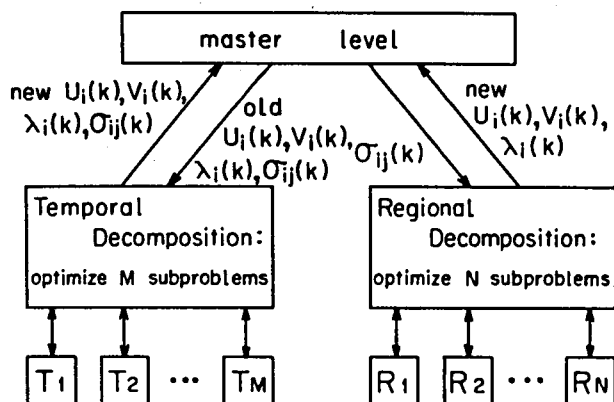
$$\left. \begin{aligned} \min f = & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \left[W_{1i} U_i(k) + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^2(k) \right. \\ & + \frac{1}{2} W_{3i} \{ U_i(k) - U_i(k-1) \}^2 \\ & \left. + \frac{1}{2} W_{4i}(k) \{ V_i^{\max} - V_i(k) \}^2 \right] \\ \text{s.t. } & (4.28) \text{ 式及び} \\ g_{ik} = & V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k) + D_i(k) - \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k) \\ & + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) \\ = 0 & \quad (i=1, \dots, N, \quad k=1, \dots, M) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

等式制約に対してラグランジュ乗数 $\lambda_i(k)$ を導入すると、この問題に関するラグランジュ関数 L は次式で示される。

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \left[W_{1i} U_i(k) + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^2(k) \right. \\
& + \frac{1}{2} W_{3i} \{ U_i(k) - U_i(k-1) \}^2 \\
& + \frac{1}{2} W_{4i}(k) \{ V_i^{\max} - V_i(k) \}^2 \\
& - \lambda_i(k) \{ V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k-1) + D_i(k) \\
& \left. + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) \} + \sum_{j \in O_i} \lambda_j(k) \sigma_{ij}(k) \right] \quad (4.31)
\end{aligned}$$

このとき、決定変数は $U_i(k)$, $V_i(k)$, $\lambda_i(k)$ ($i=1, \dots, N$, $k=1, \dots, M$) 及び $\sigma_{ij}(k)$ ($i \in I_i$, $j \in O_i$) で、全体の変数の個数は $4MN$ 以上である。小規模の計画問題を除いては、小型の計算機ではこの問題を解くことは容易ではない。

そこで、二重分割法を適用することを考えれば、その手順は第 4.6 図のようになる。まず、 $\sigma_{ij}(k)$ を固定して他はそのまま変数として扱うと、地域間の干渉が固定される、すなわち、原問題は地域の数 (N) の部分問題に分割され、これを地域分割 (R 分割) と呼ぶ。各部分問題 R_1, \dots, R_N は独立な問題である。次に変数 $U_i(k)$, $V_i(k)$, $\sigma_{ij}(k)$, $\lambda_i(k)$, ($i=1, \dots, N$) のある期間 k に着目し、 k 以外の期間の変数を全て固定すれば、原問題は期間の数 (M) の部分問題に分割され、これを時間分割 (T 分割) と呼ぶ。各部分問題 T_1, \dots, T_M は M 個の独立な問題である。



第 4.6 図 地域一時間分割による最適化

変数分割を簡単な例で説明しよう。2地域 ($i = 1, 2$), 2期 ($k = 1, 2$) の送水運用計画問題を考える。このとき, 変数は, $U_i(k), V_i(k), \sigma(k), (i=1, 2, k=1, 2)$ の10変数である。制約条件は, 地域分割では融通水量 $\sigma(k)$ を固定すると, 地域1 ($U_1(k), V_1(k)$) と地域2 ($U_2(k), V_2(k)$) に分割される。すなわち,

$$\begin{array}{cc}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & & -1 & & & \\
 -1 & 1 & & -1 & & \\
 & & 0 & & & \\
 \hline
 & & & 1 & -1 & \\
 & & & -1 & 1 & -1 \\
 & & & & & -1
 \end{array} \right] & \begin{array}{c}
 V_1(1) \\
 V_1(2) \\
 U_1(1) \\
 U_1(2) \\
 V_2(1) \\
 V_2(2) \\
 U_2(1) \\
 U_2(2) \\
 \sigma(1) \\
 \sigma(2)
 \end{array} = \begin{array}{c}
 D_1(1) + V_1(0) \\
 D_1(2) \\
 D_2(1) + V_2(0) \\
 D_2(2)
 \end{array} \\
 \text{zone 1} & \text{zone 2}
 \end{array} \quad (4.32)$$

となる。こうして地域間の干渉項である $\sigma(1)$ 及び $\sigma(2)$ を定数とすることによって, 地域1と地域2の制約条件は完全に分割される。従って, 地域毎に分割された2つの部分問題 R_1 及び R_2 が得られる。

一方, 変数を期間 k について並べ替えて, 期間1の変数 ($U_i(1), V_i(1), \sigma(1)$) と時間2の変数 ($U_i(2), V_i(2), \sigma(2)$) に分割すると, 制約条件は次の (4.33) 式のように表される。

$$\begin{array}{cc}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & -1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & -1 & -1 & \\
 \hline
 -1 & & & & & \\
 & -1 & & & & \\
 & & & 1 & -1 & \\
 & & & & 1 & -1 & -1
 \end{array} \right] & \begin{array}{c}
 V_1(1) \\
 U_1(1) \\
 V_2(1) \\
 U_2(1) \\
 \sigma(1) \\
 V_1(2) \\
 U_1(2) \\
 V_2(2) \\
 U_2(2) \\
 \sigma(2)
 \end{array} = \begin{array}{c}
 D_1(1) + V_1(0) \\
 D_2(1) + V_2(0) \\
 D_1(2) \\
 D_2(2)
 \end{array} \\
 \text{time period 1} & \text{time period 2}
 \end{array} \quad (4.33)$$

こうして、原問題は期間 1 の部分問題 T_1 と期間 2 の部分問題 T_2 に分割される。期間 1 の部分問題では、変数 $V_1(1)$, $U_1(1)$, $V_2(1)$, $U_2(1)$, $\sigma(1)$ に関して、期間 2 の部分問題とは独立に最適化が行える。しかし、期間 2 の部分問題では、期間 1 の変数 $V_1(1)$ 及び $V_2(1)$ が干渉している。そこで、この 2 つの変数の値には、前の時間 1 で求めた値を定数として与えるものとする。すなわち、期間が $k=1, \dots, M$ のとき、部分問題 T_k の解 $U_i(k)$ 及び $V_i(k)$ を次の期間における部分問題 T_{k+1} に定数として与える。こうして時間分割では、 $k=1, \dots, M$ の期間の早い方から順次解くことによって、 M 個の部分問題の最適化を行うものとする。

この地域分割と時間分割によって原問題は二通りに分割された。そして全体の最適化はこの二つの分割による部分問題群を交互を繰返して解くことによって行われる。第 4.1 表には R 分割と T 分割において、各々の部分問題 R_i , T_k がもつ決定変数、目的関数及び制約条件を示す。部分問題 R_i は、 $2M$ 個の変数及び M 個の等式制約条件をもつ計画問題であり、一方の部分問題 T_k は、 $2N$ に σ_{ij} の個数を加えた数の変数と、 N 個の等式制約条件を含む計画問題である。

第 4.1 表 二重分割法による変数，目的関数及び制約条件

(a) 地域分割による部分問題 R_i ($i=1, \dots, N$)

変 数	x_{R_i}	$U_i(1), \dots, U_i(M)$ $V_i(1) \quad V_i(M)$
定 数	z_{R_i}	$\sigma_{ij}(1), \dots, \sigma_{ij}(M)$
目的関数	f_{R_i}	$\sum_{k=1}^M [W_{1i} U_i(k) + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^2(k) + \frac{1}{2} W_{3i} \{U_i(k) - U_i(k-1)\}^2 + \frac{1}{2} W_{4i} \{V_i(k) - V_i^{\max}\}^2]$
制約条件	g_{R_i}	$V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k) + D_i(k) - \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k) + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) = 0$

(b) 時間分割による部分問題 T_k ($k=1, \dots, M$)

変 数	x_{T_k}	$U_1(k), \dots, U_N(k)$ $V_1(k), \dots, V_N(k), \sigma_{ij}(k)$
定 数	z_{T_k}	時間 k 以外の変数
目的関数	f_{T_k}	$\sum_{i=1}^N [W_{1i} U_i(k) + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^2(k) + \frac{1}{2} W_{3i} \{U_i(k) - U_i(k-1)\}^2 + \frac{1}{2} W_{4i} \{V_i(k) - V_i^{\max}\}^2]$
制約条件	g_{T_k}	$V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k) + D_i(k) - \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k) + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) = 0$

4.3.2 時間分割した最適化問題

時間的な接続関係を見捨てて得られる時間分割の部分最適化問題 T_k は次のように表される。

部分最適化問題 T_k ；

$$\begin{aligned} \min f_{T_k} = & \sum_{i=1}^N [W_{1i} U_i(k) + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^2(k) \\ & + \frac{1}{2} W_{3i} \{U_i(k) - U_i(k-1)\}^2 \\ & + \frac{1}{2} W_{4i}(k) \{V_i^{\max} - V_i(k)\}^2] \quad (4.34) \end{aligned}$$

s. t. (4.28) 式及び

$$\left. \begin{aligned} g_{T_k} = & V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k) + D_i(k) \\ & - \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k) + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

ここに、時間 k における部分最適化問題 T_k の変数は、 $U_1(k), \dots, U_N(k), V_1(k), \dots, V_N(k)$ 及び $\sigma_{ij}(k) (I_i, O_i; i=1, \dots, N)$ である。他の変数は全て固定されている。この部分問題 T_k は、2レベル法⁽⁶⁸⁾を適用すれば簡単に解くことができる。時間 k における停留条件は次式で与えられる（この条件の誘導に関しては、付録A. 1を参照）。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} U_i(k) : & W_{1i} + W_{3i} [2U_i(k) - U_i^0(k-1) - U_i^0(k+1) \\ & + \lambda_i^*(k) = 0 \quad (1 \leq k \leq M-1) \\ & W_{1i} + W_{3i} [U_i(M) - U_i^0(M-1)] + \lambda_i^*(M) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

($i=1, \dots, N$)

$$V_i(k) : W_{4i}(k) [V_i(k) - V_i^{\max}] - \lambda_i^*(k) + \lambda_i^0(k+1) = 0 \quad (4.37)$$

$$(i=1, \dots, N)$$

$$\sigma_{ij}(k) : W_{2i} \sigma_{ij}(k) - \lambda_i^*(k) + \lambda_j^*(k) = 0$$

$$(j \in O_i, i=1, \dots, N)$$

ただし、 $\lambda_i^*(k)$, $\lambda_j^*(k)$, $\lambda_i^*(M)$ は部分問題 T_k を解く過程での 2 レベル法の第 1 層で与えられるものである。一方、 $U_i^0(k+1)$ 及び $\lambda_i^0(k+1)$ は後述する地域分割による最適化で得られた解である。 $U_i^0(k-1)$ は地域分割の解としても良いが、 T_{k-1} の解を用いることとする。また、 $U_i^0(0)$ は所与の初期値である。

さて、問題 T_k では停留条件 (4.23) ~ (4.25) 式が明らかに変数の線形方程式であるので、その解は簡単に求められる。そして、変数の一次元最適化であるから、停留条件の解に上下限制約 (4.28) 式を加味すれば、2 レベル法の第 2 層の解となる。一般に、変数 X に対して上下限制約を表す関数 $B(X)$ を次式で定義しておく。

$$B(X) = \begin{cases} X^{\max} & ; \quad X > X^{\max} \\ X & ; \quad X^{\min} \leq X \leq X^{\max} \\ X^{\min} & ; \quad X < X^{\min} \end{cases} \quad (4.39)$$

よって、部分問題 T_k の解 $U_i(k)^+$, \dots は停留条件の解 $U_i(k)$, \dots に対して、

$$\left. \begin{aligned} U_i(k)^+ &= B(U_i(k)) \\ V_i(k)^+ &= B(V_i(k)) \\ \sigma_{ij}(k)^+ &= B(\sigma_{ij}(k)) \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

$$(i=1, \dots, N \quad j \in O_i)$$

が2レベル法での第2層の解として与えられる。

さて、2レベル法の第1層においては双対変数 λ がラグランジュ関数を最大にする方向で修正される。この修正をフレッチャーリース法⁽³⁶⁾で行うとすれば、 $\lambda^p(k)$ を現在のステップ p における値として、次の更新式が得られる。

$$\lambda^{p+1}(k) = \lambda^p(k) + a d^p(k) \quad (4.41)$$

ここに、 $d(k)$ は修正の方向を表すベクトルである。 a は正数で二次補間法等によって値を求める。等式制約条件の誤差を表す関数を $e(\lambda^p(k))$ とすれば、その要素 e_i は

$$\begin{aligned} e_i(\lambda^p(k)) &= -V_i^+(k) + V_i^0(k-1) + U_i^+(k) \\ &\quad - D_i(k) - \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^+(k) + \sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}^+(k) \end{aligned} \quad (4.42)$$

で与えられ、方向ベクトル $d(k)$ は次式で更新される。

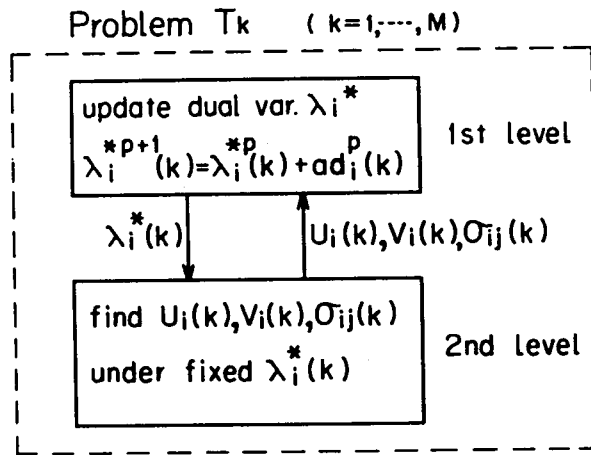
$$d^p(k) = e(\lambda^p(k)) + \beta^{p-1} d^{p-1}(k) \quad (4.43)$$

ただし、

$$\mathbf{d}^1(k) = \mathbf{e}(\lambda^1(k))$$

$$\beta^{p-1} = \frac{\mathbf{e}(\lambda^p(k))^T \mathbf{e}(\lambda^p(k))}{\mathbf{e}(\lambda^{p-1}(k))^T \mathbf{e}(\lambda^{p-1}(k))}$$

2レベル法のアルゴリズムによって問題 T_k は第4.7図に示すように、第2層で $U_i^+(k)$, $V_i^+(k)$, $\sigma_{ij}^+(k)$ が求められ、次に、第1層において等式制約条件の誤差の関数から $\lambda(k)$ が更新され、再び第2層に戻る繰返し計算が行われる。そして、各期間 k ごとに T_k ($k=1, \dots, M$) が解かれ、第4.6図に示した M 個に時間分割された部分最適化が達成される。



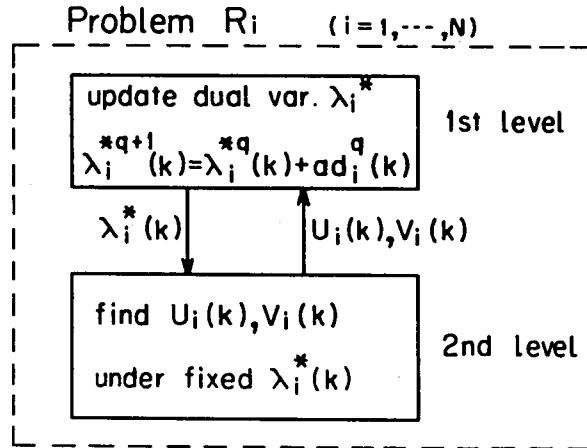
第4.7図 時間分割による部分問題 T_k

このようにして、 $U_i^0(k-1)$, $U_i^0(k+1)$, $\lambda_i^0(k+1)$ を固定したときの解 $U_i^+(k)$, $V_i^+(k)$, $\sigma_{ij}^+(k)$ が $k=1, \dots, M$ にわたって求められる。各期間 k において地域間の水収支のバランスをとるように誤差関数 $\mathbf{e}(\lambda)$ が作用しており、地域間の協調がとられている。

なお、この問題の制約条件は線形であることから、制約集合は凸集合となり、このアルゴリズムで双対ギャップは生じない。

4.3.3 地域分割した最適化問題

次に地域間のつながりを見捨てて得られる部分最適化問題 R_i を説明しよう。各々の部分問題の最適化は2レベル法で行うが、そのアルゴリズムを第4.8図に示す。



第4.8図 地域分割による部分問題 R_i

部分問題 R_i は次のように表される。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \min f_{R_i} = & \sum_{k=1}^M [W_{1i} U_i(k) + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^2(k) \\
 & + \frac{1}{2} W_{3i} \{ U_i(k) - U_i(k-1) \}^2 \\
 & + \frac{1}{2} W_{4i}(k) \{ V_i^{\max} - V_i(k) \}^2] \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

s. t. (4.28) 式及び

$$gR_i = V_i(k) - V_i(k-1) - U_i(k) + D_i(k)$$

$$-\sum_{j \in I_i} \sigma_{ji}(k) + \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}(k) = 0 \quad (4.45)$$

$$(k = 1, \dots, M)$$

地域は N 個あるので、 N 個の部分問題 R_1, \dots, R_N がある。この分割では、地域間のつながりである $\sigma_{ij}(k)$ はすべて定数として固定し、前節の時間分割問題で得た解を用いる。 N 個の部分問題は前節と同様にして 2 レベル法によって解かれる。地域 i における最適性必要条件として次の $U_i(k)$, $V_i(k)$ に関する方程式が得られる (式の誘導については付録 A. 2 を参照)。

部分問題 R_i に対する停留条件は次である。すなわち、

$$\begin{aligned} V_i(k) : & W_{4i}(k)(V_i(k) - V_i^{\max}) - \lambda_i^*(k) + \lambda_i^*(k+1) \\ & = 0 \quad (k = 1, \dots, M) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} U_i(k) : & W_{3i} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(1) \\ U_i(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ U_i(M-1) \\ U_i(M) \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} \lambda_i^*(1) + W_{1i} + W_{3i} U_i(0) \\ \lambda_i^*(2) + W_{1i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_i^*(M) + W_{1i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.47)$$

ただし、双対変数 $\lambda_i^*(k)$ は 2 レベル法の等 1 層で求められる。また、 $\lambda_i^{*(M+1)} = 0$ とする。(4.47) 式における $U_i(0)$ は所与の所期値である。(4.46)，(4.47) 式は一次元最適化の停留条件であり、これに上下限制約を考慮することによって、2 レベル法の第 2 層の解は(4.46)，(4.47) 式の解から次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_i^+(k) &= B(U_i(k)) \\ V_i^+(k) &= B(V_i(k)) \end{aligned} \quad (4.48)$$

ここに、 B は(4.39) 式と同様の関数である。

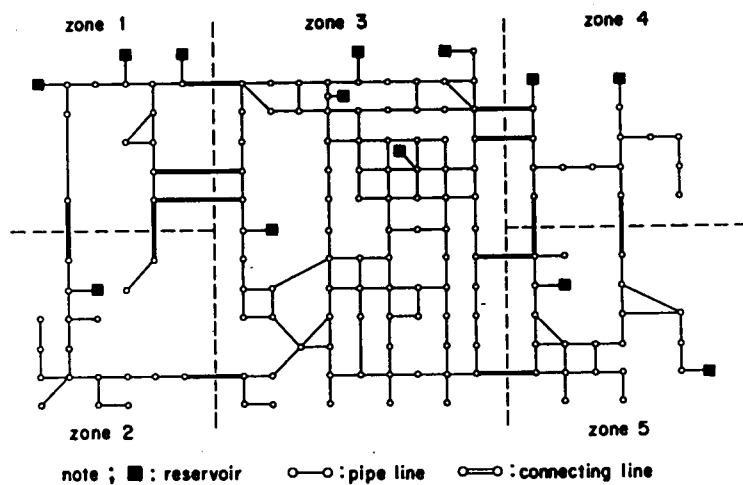
双対変数 $\lambda_i^*(k)$ ($k=1, \dots, M$) は 2 レベル法の第 1 層で更新されるが、その手順は前節と同様である。ただし、この場合の誤差関数 $e_i(\lambda_i(k))$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e_i(\lambda_i(k)) &= -V_i^+(k) + V_i^+(k-1) + U_i^+(k) \\ &\quad - D_i(k) - \sum_{j \in O_i} \sigma_{ij}^0(k) + \sum_{j \in I_i} \sigma_{ij}^0(k) \end{aligned} \quad (4.49)$$

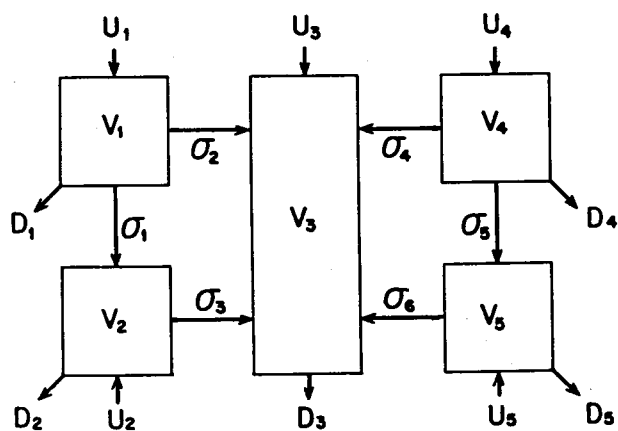
ただし、 $\sigma_{ij}^0(k)$ 、 $\sigma_{ji}^0(k)$ は固定され、 $V_i^+(k-1)$ は変数として扱われることに注意する。

4.4 計算例とその結果の考察

前節までに定式化した送水運用計画問題について、その計算例を述べる。第 4.9 図に示すようなある中規模都市の上水道系を対象とする。地理的条件から、この都市では 5 地区に分割してその運用を考えることができる。すなわち、 $N=5$ である。一つの地域内の複数の配水池は、一括して仮想的な一配水池として扱う。この都市の 5 地域に関係する変数をまとめて第 4.10 図に示す。すなわち、配水池貯水量 $V_1 \sim V_5$ 、浄水と他機関からの買水量の和 $U_1 \sim U_5$ 及び地域間



第 4.9 図 5 地域よりなる都市配水網
(H 市の例)



第 4.10 図 5 地域よりなる配水系の
変数 (ただし, $D_1 \sim D_5$ は既知)

の融通水量 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ である。送水運用計画における期間数は $M = 6$ とする。1 期間を 4 時間として 24 時間の計画問題とする。

さて、送水運用計画問題に対して、二重分割法を適用したときの収束性について検討しておこう。本節で取り上げる送水運用計画問題の計算例では、第 4.10 図に示したように、決定変数は $U_i(k)$, $V_i(k)$, $\sigma_1(k), \dots, \sigma_6(k)$ ($i=1, \dots, N$; $k=1, \dots, M$, $N=5$, $M=6$) である。従って、決定変数の個数は $n = 2MN + 6M = 96$ である。等式制約条件は、(4.27) 式の水収支式であり、 $N \times M = 30$ 個の等式からなる。いま、決定変数を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n=96$) とおけば、(4.27) 式は (4.2) 式のように $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ と表現できる。ここに、 A は $MN \times n$ 行列で \mathbf{c} は $n \times 1$ ベクトルである。4.2.1 節に述べた収束性の条件に従えば、原問題のもつ制約条件の行列 A の階数 p は、 $p = MN$ であるから⁺、行列 A の零度は、

$$n - p = n - MN = MN + 6M \quad (4.50)$$

である。

次に、地域分割 (R 分割) について考えよう。決定変数 \mathbf{x} を、地域 i ($i=1, \dots, N$) 毎にまとめて、次のように並べ替えることによって、 R 分割の問題を得る。

$$\mathbf{x}_R = (\mathbf{x}_{R1}^T, \dots, \mathbf{x}_{Ri}^T, \dots, \mathbf{x}_{RN}^T, \sigma^T)^T$$

ただし、 \mathbf{x}_R は $(2MN + 6M) \times 1$ ベクトル、 \mathbf{x}_{Ri} は $2M \times 1$ ベクトル、 σ は $6M \times 1$ ベクトルで、次の成分からなる。

$$\mathbf{x}_{Ri} = (U_i(1), \dots, U_i(M), V_i(1), \dots, V_i(M))^T, \quad i=1, \dots, N$$

$$\sigma = (\sigma_j(1), \dots, \sigma_j(M))^T, \quad j=1, \dots, 6$$

+ 最適化問題の等式条件は、一般に $MN < n$ である。

R分割では、ベクトル σ は定数として扱われる。決定変数 \mathbf{x} を \mathbf{x}_R に並べ替えることによって、制約条件 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ は、4.2.1節に述べたように $\mathbf{A}_R\mathbf{x}_R=\mathbf{c}_R$ と変形される。そして、 \mathbf{A}_R は次式の形に書かれる。

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{B}_R + \mathbf{G}_R \mathbf{H}_R \quad (4.51)$$

ここに、 \mathbf{A}_R は $MN \times n$ 行列、 \mathbf{c}_R は $n \times 1$ ベクトル、 \mathbf{B}_R は $MN \times n$ 行列、 \mathbf{G}_R は $MN \times 6M$ 行列、 \mathbf{H}_R は $6M \times n$ 行列である。行列 \mathbf{H}_R の階数 q_R は、

$$q_R = 6M \quad (4.52)$$

で与えられる。すなわち、地域間で干渉する変数の個数は $6M$ である。

時間分割についても、変数 \mathbf{x} を時間 k ($k=1, \dots, M$) 毎にまとめて並べ直せば、次の \mathbf{x}_T を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_T &= (\mathbf{x}_{T1}^T, \dots, \mathbf{x}_{Tk}^T, \dots, \mathbf{x}_{TM}^T)^T \\ \mathbf{x}_{Tk} &= (U_1(k), \dots, U_N(k), V_1(k), \dots, V_N(k), \sigma_1(k), \dots, \sigma_6(k))^T, \\ k &= 1, \dots, M \end{aligned}$$

ここに、 \mathbf{x}_T は $(2MN + 6M) \times 1$ ベクトル、 \mathbf{x}_{Tk} は $(2N + 6) \times 1$ ベクトルである。決定変数 \mathbf{x} を \mathbf{x}_T のように並べ替えることによって、制約条件 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ は、 $\mathbf{A}_T\mathbf{x}_T=\mathbf{c}_T$ と変形される。時間分割では、4.3.1節の(4.33)式で説明したように、部分問題 T_k においては $V_i(k-1)$ ($i=1, \dots, N$) の値は、前の期間 $k-1$ の部分問題 T_{k-1} の解を定数として与えられる。従って、部分問題 T_k では、決定変数が \mathbf{x}_{Tk} 、他の部分問題からの干渉が $V_i(k-1)$ ($i=1, \dots, N$) であるから、行列 \mathbf{A}_T は次の形に書かれる。

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{B}_T + \mathbf{G}_T \mathbf{H}_T \quad (4.53)$$

ただし,

$$H_T x_T = \{V_i(1), \dots, V_i(M-1)\}^T, \quad i=1, \dots, N$$

ここに, A_T は $MN \times n$ 行列, B_T は $MN \times (2N+6)$ 行列, G_T は $MN \times N(M-1)$ 行列, H_T は $N(M-1) \times n$ 行列である。従って, T 分割において, 部分問題の間の干渉変数の個数 q_T は,

$$q_T = N(M-1) \quad (4.54)$$

である。

以上から, (4.50), (4.52), (4.54) 式を, 4.2.1 節の (4.25) 式の条件

$$n-p \geq q_R + q_T$$

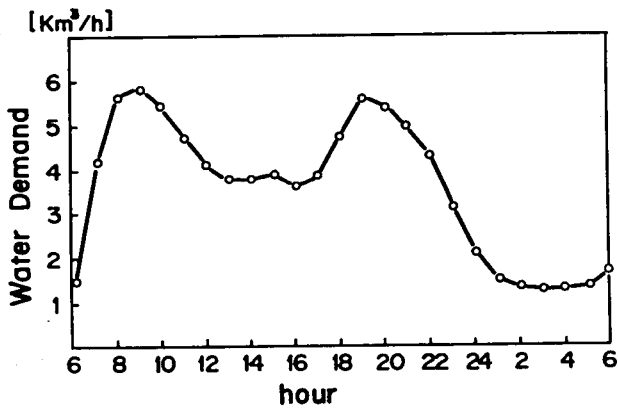
に代入すれば, $MN+6M > 6M+N(M-1)$ となり, これは必ず満足される。従って, 本節で取り上げる計算例に対して二重分割法を適用した場合, 最適解に収束することが期待される。

次に, この計算例について説明しよう。

まず, 目的関数の重み係数を第 4.2 表に示す。 W_{1i} は浄水及び買水コストに対するものであるが, 地域 3 及び 4 では買水量が大きく, そのコストが他地域での自己水源利用に比較して高くなっている。 W_{2i} は地域間の融通水量のコストに対するもの, W_{3i} は浄水量の平滑化を目的とする重みである。 $W_{4i}(k)$ は $k=1, \dots, 5$ の時間帯では, 配水池の水量の変動は制限されないので小さな値を与え, 深夜にあたる $K=6$ の時間帯では, 配水池を満水にするために大きな値を与えている。

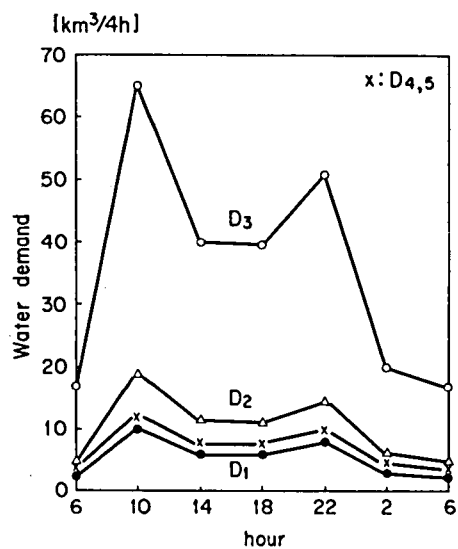
第 4.2 表 目的関数の重み係数

i 重み係数	1	2	3	4	5	6
W_{1i}	2.0	2.0	2.2	2.2	2.0	
W_{2i}	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
W_{3i}	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	
$W_{4i}(k)$ $k=1, \dots, 5$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
$W_{4i}(6)$	10.	10.	10.	10.	10.	



第 4.1 1 図 実際の需要パターンの例 (夏期)

次に、需要水量のパターンについてみる。第 4.1 1 図には夏期の一週間に観測されたある配水池からの実績需要量の平均パターンである。午前と午後には 2 つのピークを持ち、深夜には減少している。計算では、この実績パターンと類似の第 4.1 2 図に示す単純化されたパターンを用いる。その場合の 5 地域の各需要量を第 4.3 表に示す。地域 4 と 5 は同じ需要パターンと仮定している。



第 4.1 2 図 計算例のための仮想需要

第 4.3 表 需要パターンの数値

[km³]

地域別 時間帯	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅
6 - 10	10.1	18.8	64.9	12.3	12.3
10 - 14	6.1	11.4	39.4	7.5	7.5
14 - 18	6.0	11.5	39.5	7.6	7.6
18 - 22	7.9	14.7	51.0	9.7	9.7
22 - 2	3.2	6.0	20.1	4.0	4.0
2 - 6	2.7	4.6	17.1	2.9	2.9
合 計 [km ³ /day]	36.0	67.0	232.0	44.0	44.0

変数の上下限制約を第 4.4 表に示す。地域 3 と 4 の U_3 及び U_4 の上限が大きいのは、買水量が含まれているためであり、他地域では自己水源の浄水能力の上限を示している。

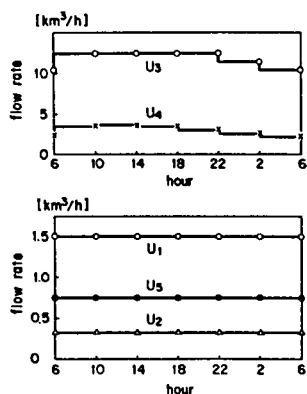
第 4.4 表 決定変数の上下限制約

variables	minimum	maximum
$U_1(k)$	0.0	1.5 km^3/h
$U_2(k)$	0.0	0.325 km^3/h
$U_3(k)$	0.0	12.58 km^3/h
$U_4(k)$	0.0	4.0 km^3/h
$U_5(k)$	0.0	0.75 km^3/h
$\sigma_1(k) \sim \sigma_6(k)$	-5.0	5.0 km^3/h
$V_1(k)$	0.0	12.7 km^3/h
$V_2(k)$	0.0	1.7 km^3/h
$V_3(k)$	0.0	69.8 km^3/h
$V_4(k)$	0.0	28.6 km^3/h
$V_5(k)$	0.0	5.1 km^3/h

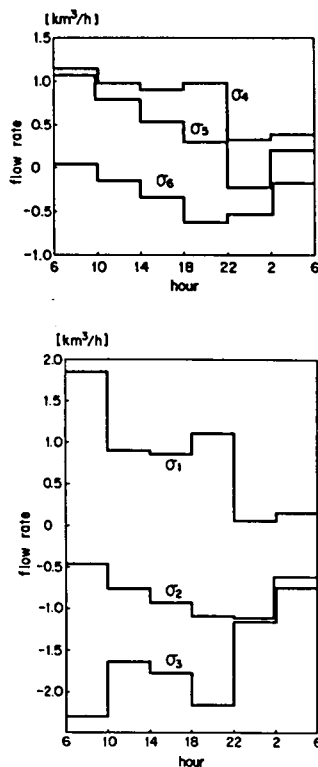
$$k = 1, \dots, 5$$

配水池貯水量の上限値は他地域 3 と 4 では大きいですが、他の地域ではその貯水能力は小さく、特に地域 2 では需要量に比べて容量が小さいので、他からの融通に頼る必要がある。

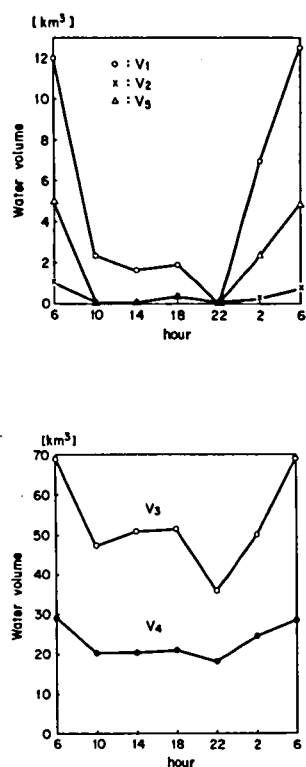
これらの条件の下に、地域分割による最適化と時間分割による最適化を交互に繰返して、最適解を得た。その結果を第 4.13 図に示す。まず、同図(a)の浄水及び買水量のパターンは、地域 1, 2, 5 の $U_{1,2,5}$ では能力上限で一定値を取り、余裕のある地域 3 及び 4 の $U_{3,4}$ では時間的に変動するが、その幅は小さい。次に、同図(b)には、地域間の融通水量のパターンを示す。 σ_1 と σ_3 によって、



(a) 取水量



(b) 融通水量

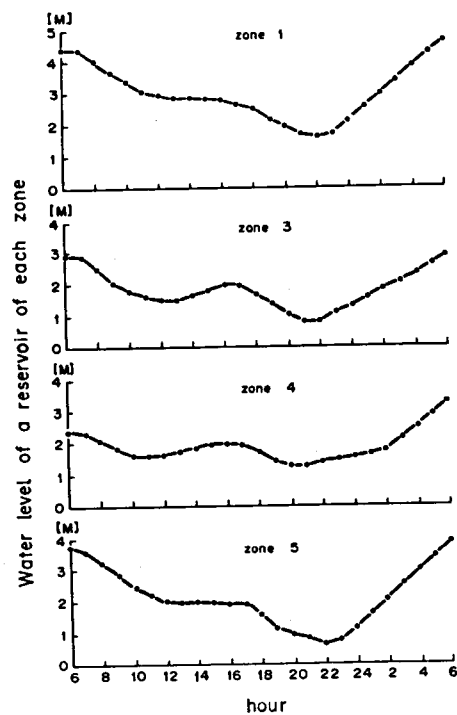


(c) 配水池貯水量

第 4.1 3 図 二重分割法で得た最適解

地域 2 は常に他地域から水が供給され、地域 1 では水源能力の不足を地域 3 からの融通で補っている。 $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ をみると、地域 4 から 3 へ、地域 4 から 5 へまた、地域 3 から 5 への供給があり、地域 5 の自己水源能力の不足を他地域から補っていることがわかる。配水池の水量変動パターンを同図(c)に示す。運用開始の 6 時では、全配水池は上限近く迄貯水されており、需要が増加する時間帯では、その水量が下限値まで減少する配水池 $V_{1,2,5}$ がある。最終の翌日時刻 6 時には、配水池はいずれも上限値に近くなっており、通常、経験によって運用されるパターンと類似の結果を得ている。

例えば、この都市で実際に行われている配水池の運用パターンと比較してみよう。第4.14図に地域毎の配水池で観測された実際の水位パターンを示す。この都市の上水道系統では、経験的に運用が行われており、数理的なスケジューリングや最適化操作は行われていない。各配水池共、深夜から早朝にかけて配水池の水位を上昇させ、需要量に従って午前と午後水位が下降するパターンがみられる。第4.13図(c)の最適化された配水池運用パターンと、この実際の運用とを比較してみると、類似のパターンであることがわかる。需要の大きい地域3では、両者の運用パターンとも比較的変動が大きく、地域3より需要の少ない地域4では、水位の変動が比較的小さい。



(data: Aug. 26, '83)

第4.14図 実際に運用されている配水池の
水位の1日の変化 (H市)

このように、実際に行われている運用は経験に基づいたものであるが、配水池の水位パターンの比較から見て、最適に近い運用が経験的に行われていることがわかる。

次に、本章で述べた二重分割法と従来からの他の最適化手法とを比較してみよう。第4.5表にその比較結果を示す。まず、原問題を分解しないで一括して解く場合には、変数の個数は96個、制約条件式の個数は36個である。幾つかの適用可能な手法が考えられるが、その中でも、現在計算効率が高いと言われている一般化縮少勾配法（GRG法）^(35,36)を用いた。その結果、記憶容量が60キロ語、計算時間は672秒であった。一方、本章に述べた二重分割法では、記憶容量が16キロ語、計算時間が162秒であった。そして、地域分割と時間分割の間での繰返し回数は50回であった。部分問題の個数は、地域分割では12変数、

第4.5表 最適化手法の比較

最適化手法	プログラムサイズ (kw)	計算時間 ⁺ (sec)	収束回数	変数及び制約条件の個数
G R G 法	60	672.6	—	(96, 30) ^(注1)
二重分割法	16	162.4	50	[(12,6)*5] R-dec. ^(注2) [(16,5)*6] T-dec.
双対分解法	31	1104.6	60	(24, 6)*4, (36, 6) ^(注3)

+・VAX 11/780によるCPU時間

(注1) 96変数、30等式制約条件の全体問題。

(注2) 次の①及び②を交互に解く。

① 地域分割(R-dec)では、12変数、5等式制約条件の5つの部分問題。

② 時間分割(T-dec)では、16変数、5等式制約条件の6つの部分問題。

(注3) 24変数、6等式制約条件の4つと、36変数、6制約条件の1つの計5つの問題。

6 制約式の部分問題が 5 ($=N$)，時間分割では 16 変数，5 制約式の部分問題が 6 ($=M$) である。4.3.2 節及び 4.3.3 節に述べたように，部分問題が小規模であるため，他の分解しない方法に比べて計算時間が少なくてすむ。次に，本解法以外の分解法として，例えば文献(31)にあるように，地域間の融通水量 σ を協調変数と考えれば，地域に関して加法の形となり双対分解法が適用できる。

この方法では，24 変数及び 6 制約式をもつ部分問題が 4 個（地域 1，2，4，5）と，36 変数及び 6 制約式をもつ部分問題が 1 個（地域 3）の計 5 個の部分問題に分解される。GRG 法による一括最適化に比べ，記憶容量は減少しても，繰返し回数が多くなり，計算時間は 1104 秒かかった。二重分割法はこの双対分解法に比べ，記憶容量及び計算時間ともに少ない。

以上のように，本章の二重分割手法は，分割された各部分問題が小規模であり，2 レベル法等の適用によって，記憶容量と収束のための繰返し協調回数が他の手法に比較して，優れていることが計算例に示されている。

なお，他の解法として運用計画問題を LP で定式化し，時間 k について分解し $k=1$ から $k=M$ まで，時間の順に解く方法が提案されている⁽²³⁾。しかし，その方法は時間 k に関して，完全に分解できない問題を扱っており，準最適解に止まっている。これは，本章の二重分割の時間分割の部分問題を 1 回解くことに等しい。

送水運用計画問題は，一般に変数の多い非線形計画問題，あるいは線形計画問題として定式化されるのが普通である。本手法は，地域分割及び時間分割の二重分割という理解しやすい分解法であり，特に繰返し計算の過程において得られた暫定解は，実行可能な準最適解として用いることができるという実用的利点がある。

4.5 結 言

本章では、はじめに非線形計画問題に対する二重分割法を説明し、次に複数地域の送水運用計画問題を定式化した。そして、この送水運用計画問題が時間と地域に関して分割可能であることを示した。二重分割法では、時間分割及び地域分割により、得られた部分問題を繰返し解くが、その過程で得られた暫定解は、実行可能な準最適解として用いることができる利点がある。二重分割法の繰返し計算の収束性については、収束のための十分条件を、本章で取り上げた問題が満していることを確かめた。

中都市の上水道系を例にとって、具体的な送水運用計画問題の計算例を示した。最適化計算のための他の代表的手法であるGRG法及び双対分解法と比較した結果、二重分割法が記憶容量及び計算時間が少なくてすむという点で、有効であることが明らかとなった。また、得られた最適解は実際の配水池運用のパターンと類似のパターンであることが示された。

なお、この計算例においては、二重分割法の計算は常に収束することが確かめられた。

第5章 進行波特性を考慮した送水管路の異常検知法

5.1 序 言

近年、都市域における水需要の増加に伴って、広域的な水輸送系統が整備されつつある。特に、取水源が需要地から遠距離にあって、大容量長距離輸送をする場合が多くなっている。この傾向に伴って送水系統の保護監視システムの開発と整備への要求が高まっている。すなわち、送水管の破裂事故や閉塞事故は、送水の中断をもたらし、社会的に重大な影響を及ぼすものであり、その迅速な発見と復旧のための監視システムの開発が必要である。

従来、送水管路の破裂事故を瞬時に検知する方法としては、破裂に伴う圧力降下の波動が水中を伝搬する時間から検知する方法^(26,52)や、異常音を検知する方法⁽³⁾などが提案されている。しかし、定常状態での圧力降下を対象としており、水撃作用が発生したときのような過渡的状态では適用できない。また、管路中を往復する反射波の影響を考慮していない。更に管路の両端での流量差の異常による方法では、漏洩流量を検知できても、事故点の位置を標定することができない。

本章では、送水管路の破裂事故、閉塞事故に伴って、圧力あるいは流速に変動が生じ、これが波動として伝搬することを利用した検知方式を提案する^(18,19)。圧縮性流体の性質として生ずる水撃作用は、古くから多くの研究が行われてきたが^(2,8,9,27,28,54,62,71)とくにシュナイダー・ベルジェロンの関係式⁽¹³⁾が導かれて水撃作用の伝搬解析の図式解法として用いられてきた。本論文で提案する検知方式は、このシュナイダー・ベルジェロンの関係式を利用するものである。

電力系統工学の分野では、このシュナイダー・ベルジェロンの関係式を利用した送電線保護方式が研究されている^(60,61)が、上水道の分野では、単に水撃作用の解析手段に止まっている。この関係式は、進行波の特性曲線上で成立するものであるが、管路の破裂あるいは閉塞事故の場合にも、圧力及び流速と事故との関係を表すものと考えられる。事故により発生する圧力と流速の変動を、進行波としてとらえる方法は、圧力降下検知法や流量差法のもつ特徴をもち、更に管路中に発生する反射波の影響も考慮されているので、事故による波動の変化を的確に

検知できると考えられる。本章では、この考え方に基づいて、事故点の位置標定、事故の種類や規模の推定の方法を提案し、シミュレーションによってその検討と考察を行う。

5.2 異常検知の基本原理

5.2.1 管路の状態判別関数の定義

管路を流れる水は、管内流を一次元流れとし、流体の圧縮性、粘性に基づく摩擦力及び管の弾性変形を考慮して、2.2.1節で述べたように運動方程式と連続方程式によって表される。一般の上水道管路では、圧力波の伝搬速度 c が流速 v よりも大きい、すなわち $c \gg v$ であることから、本章では(2.9)及び(2.10)式を基礎にして議論を進めることとし、更に摩擦損失の項を無視することにすれば、次式の運動方程式と連続方程式を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

ここに、 v は流速、 h は水頭、 c は定数、 g は重力加速度である。

(5.1) 及び (5.2) 式は、線形の波動方程式であり、よく知られているように次式で表される一般解

$$h(x, t) = F\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (5.3)$$

$$v(x, t) = -\frac{g}{c} F\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{g}{c} f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (5.4)$$

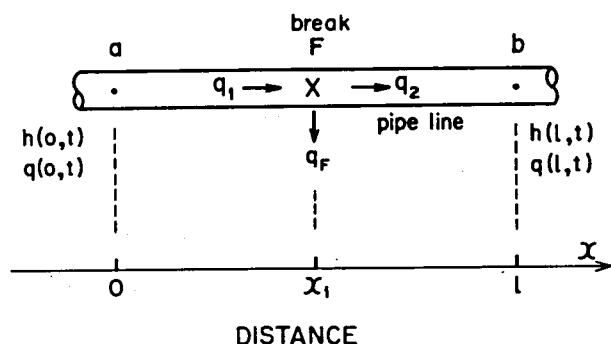
すなわち、ダランベールの解をもつ。ここに、 $F\left(t + \frac{x}{c}\right)$ 及び $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ は各々、後進波及び前進波を表す。

本章では、流速 v よりもむしろ流量 q について考察するので、(5.4)式の代

りに次の(5.5)式を用いることとする。

$$q(x, t) = -\frac{gA}{c} F\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{gA}{c} f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (5.5)$$

ただし、Aは管の断面積で圧力による変化率は小さいと仮定している。



第5.1図 破裂事故がある管路モデル

第5.1図に示す管路において、a点($x=0$)及びb点($x=l$)における水頭 h と流量 q の間には、(5.3)式及び(5.5)式の一般解から導かれる次の関係が成立する。

$$h(0, t) - \frac{c}{gA} q(0, t) = h(l, t - \tau) - \frac{c}{gA} q(l, t - \tau) \quad (5.6)$$

ここに、 l は管路長、 $\tau = l/c$ である。この関係式は後進波により導かれたものであり、第5.1図のb点で観測された波動が、a点に時間 τ だけ遅れて到達することを表している。前進波に関しても同様にして、次の関係式を得る。

$$h(0, t - \tau) + \frac{c}{gA} q(0, t - \tau) = h(l, t) + \frac{c}{gA} q(l, t) \quad (5.7)$$

この(5.6)式及び(5.7)式は、シュナイダー—ベルジェロンの関係式と呼ばれ、進行波の特性曲線上で常に成立する等式である。このシュナイダー—ベル

ジェロンの関係式は、水撃作用の図式解法の一つとして知られているが、以下の節に述べるような管路の異常事故検知に適用した例は、これまでのところ見当たらない。

上に述べたシュナイダー－ベルジェロンの関係式から、次のような後進波による状態判別関数 $\delta_b(t)$ 及び前進波による状態判別関数 $\delta_f(t)$ を定義する。

$$\delta_b(t) = h(o, t) - \frac{c}{gA} q(o, t) - h(\ell, t - \tau) + \frac{c}{gA} q(\ell, t - \tau) \quad (5.8)$$

$$\delta_f(t) = h(o, t - \tau) + \frac{c}{gA} q(o, t - \tau) - h(\ell, t) - \frac{c}{gA} q(\ell, t) \quad (5.9)$$

状態判別とは、送水管路の状態が正常か否かについての判別を意味している。管路の一部で破裂事故によって異常が生じたり、閉塞が生じた場合には、両端での流量収支が合わなくなったり、あるいは水頭の異常な降下が生ずるが、基本的にはそれまでの流れの状態が変わり、管路のパラメータが異常に変化したと考えられる。このような場合、進行波がその事故点から発生したり、あるいは事故点を通過する際に進行波の波形に何らかの歪みが生じたりすると考えられる。この観点から、 $\delta_b(t)$ あるいは $\delta_f(t)$ によって対象とする管路の状態判別を行うことができると考えられる。すなわち、

$\delta_b(t) = 0$ のとき、管路の状態は正常

$\delta_b(t) \neq 0$ のとき、管路の状態は異常

であると判定できる。同様に $\delta_f(t)$ によっても、管路の状態を判定することが可能である。以下に、管路に破裂事故及び閉塞事故が発生した場合について、このことを具体的に示そう。

5.2.2 破裂事故の検知

管路で破裂事故が発生し、漏洩が生じた場合について考えよう。第5.1図の管

路のF点で破裂事故が発生し、その漏洩流量が $q_F(t)$ であるとする。a点からのF点の距離を x_1 としたとき、後進波に関する関係式(5.6)式がa-F間で成立して次式を得る。

$$h(o, t) - \frac{c}{gA} q(o, t) = h(x_1, t - \tau_1) - \frac{c}{gA} q_1(x_1, t - \tau_1) \quad (5.10)$$

ここに、 $\tau_1 = x_1 / c$ でa-F間の波動伝搬時間である。同様にして、F-b間の後進波について波動伝搬時間を $\tau_2 = (\ell - x_1) / c$ とすれば次式を得る。

$$h(x_1, t) - \frac{c}{gA} q_2(x_1, t) = h(\ell, t - \tau_2) - \frac{c}{gA} q(\ell, t - \tau_2) \quad (5.11)$$

(5.6)式の t を $t - \tau_1$ で置換し、さらに $\tau = \tau_1 + \tau_2$ を考慮して次式を得る。

$$\begin{aligned} h(o, t) - \frac{c}{gA} q(o, t) + \frac{c}{gA} q_1(x_1, t - \tau_1) \\ = h(\ell, t - \tau) - \frac{c}{gA} q(\ell, t - \tau) + \frac{c}{gA} q_2(x_1, t - \tau_1) \end{aligned} \quad (5.12)$$

ただし、(5.12)式中の q_1 は事故点直前の位置における管路流量、 q_2 は事故点直後の位置における管路流量である。(5.8)式に(5.12)式を用いて書き直すと、状態判別関数 $\delta_b(t)$ は次のようになる。

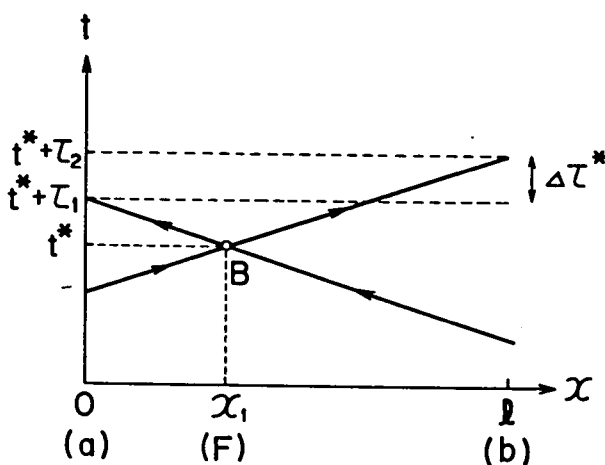
$$\begin{aligned} \delta_b(t) &= -\frac{c}{gA} \{q_1(x_1, t - \tau_1) - q_2(x_1, t - \tau_1)\} \\ &= -\frac{c}{gA} q_F(t - \tau_1) \end{aligned} \quad (5.13)$$

すなわち、管路の破裂漏洩事故の場合には、 $\delta_b(t)$ は零ではない。また、 $\delta_b(t)$ は τ_1 時間前の漏洩流量に比例した値となっている。

前進波に関する状態判別関数 $\delta_f(t)$ についても、同様の考察により次式を得る。

$$\delta_f(t) = \frac{c}{gA} q_F(t - \tau_2) \quad (5.14)$$

従って、状態判別関数 $\delta_b(t)$ 及び $\delta_f(t)$ が零でなくなったときには、破裂による漏洩が生じており、 $\delta_b(t)$ 及び $\delta_f(t)$ から時間 τ_1 及び τ_2 前の漏洩流量が求められる。



第 5.2 図 管路中を伝搬する進行波

次に、管路破裂事故が発生した位置を標定する方法について考察する。第 5.2 図は、横軸に距離、縦軸に時間を取り、前進波と後進波の波動伝搬の様子を示したものである。時刻 t^* における漏洩流量を $q_F(t^*)$ とする。このときの後進波は事故点 F から a 点までの時間 τ_1 かかって到達する。一方、前進波は b 点に時間 τ_2 で到達する。第 5.2 図の B 点で交叉するこの二つの進行波についての状態判別関数を導くと、

$$\delta_b(t^* + \tau_1) = -\frac{c}{gA} q_F(t^*) \quad (5.15)$$

$$\partial_f(t^* + \tau_2) = \frac{c}{gA} q_F(t^*) \quad (5.16)$$

となり、 ∂_b と ∂_f の絶対値が等しく、符号が反対であることがわかる。よって、 $\Delta\tau^* = \tau_2 - \tau_1$ 及び $t = t^* + \tau_1$ とすれば、(5.15)式及び(5.16)式より、次式が成立つ。

$$-\partial_b(t) = \partial_f(t + \Delta\tau^*) \quad (5.17)$$

すなわち、 $-\partial_b$ と ∂_f は時間 $\Delta\tau^*$ だけずれて同じ値をとる。従って、

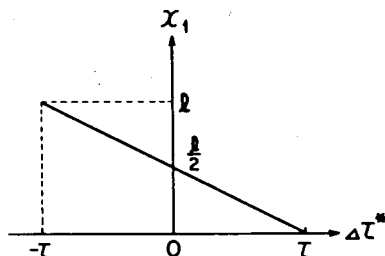
(5.17)式を用いて $\Delta\tau^*$ が決定できれば、次の関係式

$$\Delta\tau^* = \tau_2 - \tau_1 = \frac{\ell - x_1}{c} - \frac{x_1}{c} \quad (5.18)$$

から、事故の発生点の位置 x_1 を標定することができる。すなわち、(5.18)式から、事故点の位置 x_1 は、第5.3図に示すように

$$x_1 = \frac{1}{2}(\ell - c\Delta\tau^*) \quad (5.19)$$

で与えられる。



第5.3図 $\Delta\tau^*$ と標定位置 x_1 の関係

具体的には $\Delta \tau^*$ は $-\partial_b(t)$ と $\partial_f(t)$ の時系列データのパターンのずれから決定することができるが、その方法は 5.3.2 節に述べる。

以上から、管路の破裂事故発生の検知、事故点の位置及び破裂漏洩流量の値が状態判別関数によって決定できることが明らかとなった。

5.2.3 閉塞事故の検知

前節では、破裂事故の場合の事故検知について述べたが、次に管路の閉塞事故について検討しよう。いま、第 5.1 図の F 点で漏洩のない閉塞事故が発生したと仮定し、その事故点直前の位置における水頭を h_1 ，直後の位置における水頭を h_2 とする。このとき、後進波について次式が成立する。まず、F a 間においては、

$$h(o, t) - \frac{c}{gA} q(o, t) = h_1(x_1, t - \tau_1) - \frac{c}{gA} q(x_1, t - \tau_1) \quad (5.20)$$

が成立する。次に F b 間については、

$$h_2(x_1, t) - \frac{c}{gA} q(x_1, t) = h(\ell, t - \tau_2) - \frac{c}{gA} q(\ell, t - \tau_2) \quad (5.21)$$

が成立する。(5.21) 式における t を $t - \tau_1$ で置換して、更に (5.8) 式を用いれば次式を得る。

$$\partial_b(t) = h_1(x_1, t - \tau_1) - h_2(x_1, t - \tau_1) \quad (5.22)$$

すなわち、状態判別関数 $\partial_b(t)$ は閉塞事故点の直前と直後の水頭差を示していることがわかる。これは、事故によって管路断面積が小さくなり、かつ抵抗が増加するから、事故点で水頭差が生ずるためである。

前進波に関する判別関数についても同様の考察により、

$$\delta_f(t) = h_1(x_1, t - \tau_2) - h_2(x_1, t - \tau_2) \quad (5.23)$$

が得られる。従って、時刻 t に対して、 $\delta_b(t + \tau_1) = \delta_f(t + \tau_2)$ であるから、 $\Delta\tau^* = \tau_2 - \tau_1$ とすれば、

$$\delta_b(t) = \delta_f(t + \Delta\tau^*) \quad (5.24)$$

を得る。これから、判別関数 δ_b と δ_f は時間 $\Delta\tau^*$ だけずれて同じ値を示す。 $\Delta\tau^*$ の決定が、前節に述べた破裂事故の場合と同様に $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ の間に成立つ (5.24) 式を用いて行うことができれば、事故点 x_1 の位置決定は (5.19) 式によって求められる。以上のように、管路の閉塞事故発生の検知、事故点の位置及び閉塞による圧力降下の値を、判別関数 δ_b と δ_f によって決定できることが明らかとなった。

さて、前節の結果と比較して、閉塞事故では δ_b と δ_f の符号は同一であることが破裂事故の場合と異なっている。従って、判別関数 $\delta_b(t)$ 及び $\delta_f(t)$ が零であれば管路は正常と判定し、零でなくなったときに事故発生が検知できる。そして、 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ が異付号に変化すれば破裂事故、同符号に変化すれば閉塞事故であると判定できる。更に、 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ から時間のずれ $\Delta\tau^*$ が決定できれば、いずれの事故の場合にも事故点の位置が決定できる。

なお、監視の対象区間の管路が正常である限り、区間外から伝搬してくる擾乱の波動は正常に伝搬するから、判別関数は常に零となり、正常と判定されることは明らかである。

5.2.4 管路の摩擦損失を考慮した場合の状態判別関数

5.2.1 節における管路の状態判別は、摩擦損失を無視した (5.1) 式及び (5.2) 式で表される近似モデルである線形波動方程式のダランベールの解を基に定義した。本節では、5.2.1 節で無視した管路の摩擦損失の項について考察す

る。

管路の摩擦損失は、管路に沿って分布して考慮すべきものであるが、実用上は損失水頭を管路の終端部分に集約して考えることが多い。また、損失水頭は流速 v の関数で表されるが、管路の長さ方向にわたる平均流速を用いて表現されることが多い。この仮定から、定常の流れの状態で正常な管路の場合には、管路の長さ ℓ にわたる摩擦損失水頭は、(2.9) 式から

$$h(o, t) - h(\ell, t) = \int_0^{\ell} h'_{\ell}(q) dx \quad (5.25)$$

と表される。ここに、単位距離あたりの損失水頭 h'_{ℓ} は、流速 v の代りに、流速 q を用いて表している。

$h'_{\ell}(q)$ は、例えばダルシー・ワイズバッハ (Darcy-Weisbach) の式を用いれば、

$$h'_{\ell}(q) = f_d \frac{8}{\pi^2 g} D^{-5} |q| q \quad (5.26)$$

と表される。ここに、 f_d はダルシー・ワイズバッハの摩擦損失係数、 D は管の直径で、管路の長さ方向に全て一様であると仮定しておく。

従って、長さ ℓ の管路に対する状態判別関数 $\delta_b(t)$ 及び $\delta_f(t)$ は定常流の状態途中で水の出入がなければ、(5.8) 式及び (5.9) 式から

$$\delta_b(t) = \delta_f(t) = h'_{\ell}(q) \cdot \ell \quad (5.27)$$

となり、管路が正常であっても零ではなく、摩擦損失水頭に相当する値をもつことがわかる。このことから、管路の状態判別には、管路の摩擦損失水頭分を考慮する必要がある。摩擦損失水頭は、流量すなわち流速の関数であるから、計測点である a 点及び b 点の平均流量を用いることにする。すなわち、(5.27) 式の右辺の流量 q の値として、

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{4} \{q(o, t) + q(o, t-\tau) + q(\ell, t) + q(\ell, t-\tau)\} \quad (5.28)$$

を用いることとする。

従って、状態判別は次式で行う。

$$|\partial_b(t) - h'_\ell(\bar{q}(t))\ell| \leq \varepsilon_b \quad \text{かつ,}$$

$$|\partial_f(t) - h'_\ell(\bar{q}(t))\ell| \leq \varepsilon_f \quad \text{ならば正常。}$$

ただし、 ε_b 及び ε_f は計測誤差を考慮した値である。以上のように、平均流量による摩擦損失水頭の近似によって状態判別を改善することができる。

5.3 状態判別関数による異常検知の方法

5.3.1 時系列相関による位置標定

5.2.2 節及び 5.2.3 節に述べたように、事故点の位置標定には、 $\partial_b(t)$ と $\partial_f(t)$ から $\Delta\tau^*$ を決定する必要がある。本節では、 $\partial_b(t)$ と $\partial_f(t)$ の時系列データの相関分析によって、このことが可能であることを示そう。いま、第 5.1 図の a 点と b 点で水頭と流量を観測し、更にこの観測値から状態判別関数 $\partial_b(t)$ と $\partial_f(t)$ を時間間隔 Δt で $\partial_b(t)$, $\partial_b(t-\Delta t)$, \dots , $\partial_b(t-n\Delta t)$ のように求めて、記録しておくものとする。それらの値から、

$$\bar{\partial}_b(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \partial_b(t-i\Delta t)$$

$$\bar{\partial}_f(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \partial_f(t-i\Delta t)$$

$$\sigma_b^2(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [\partial_b(t-i\Delta t) - \bar{\partial}_b(t)]^2$$

$$\sigma_f^2(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [\delta_f(t-i\Delta t) - \bar{\delta}_f(t)]^2$$

$$\gamma_{bf}(t, k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [\delta_b(t-i\Delta t) - \bar{\delta}_b(t)][\delta_f(t-k\Delta t) - \bar{\delta}_f(t)]$$

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

を計算する。ここに n はサンプル数、 $\bar{\delta}_b(t)$ 、 $\bar{\delta}_f(t)$ は平均値、 $\sigma_b^2(t)$ 、 $\sigma_f^2(t)$ は分散、 $\gamma_{bf}(t, k)$ は相互分散である。このとき、相互相関係数 $\rho_{bf}(t, k)$ は、

$$\rho_{bf}(t, k) = \frac{\gamma_{bf}(t, k)}{\sigma_b(t) \sigma_f(t)} \quad (5.30)$$

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

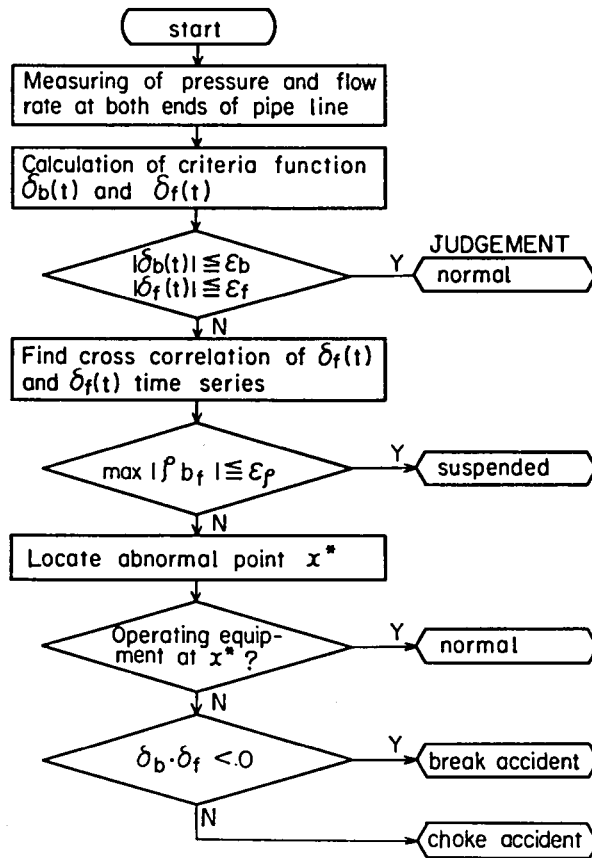
で与えられる。ある時刻 t において、 $\rho_{bf}(t, k)$ の中で最も大きな相関係数をもつ、すなわち、 δ_b と δ_f のパターンが合致するような k を k^* として、

$$\Delta \tau^* = k^* \Delta t \quad (5.31)$$

によって、 $\Delta \tau^*$ を決めることができる。また、相関係数がそれ程大きくないときには、相関が顕著でないから、状態判別の精度が保証されない。従って、相関係数が $|\rho_{bf}(t, k^*)| \geq \epsilon_\rho$ のときに遅れ $\Delta \tau^*$ を決定することとする。

5.3.2 状態判別の手順

送水管路の状態判別のための処理手順を、第5.4図にフローチャートで示す。サンプリング周期 Δt 毎に、管路の2観測点から水頭と流量の計測値を収集し、2点間の波動伝搬時間 τ を考慮して、判別関数 $\delta_f(t)$ と $\delta_b(t)$ が求められる。



第 5.4 図 異常検知の手続き

両方の値が小さければ、管路は正常と判断されて処理を終る。一方、判別関数 $\delta_b(t)$ 、 $\delta_f(t)$ が大きな値をとれば異常の可能性があるので、 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ の相互相関係数 ρ_{bf} を計算する。このとき、 ρ_{bf} が小さければ、異常の可能性はあるが事故点の標定ができるほど、十分な大きさの変化が検知されなかったとして判定保留とする。相互相関係数が大きな値を示せば、 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ の時間遅れ $\Delta\tau^*$ を求め、これから事故点の位置の標定計算をする。もし、標定位置においてバルブ操作等の既知の情報があれば、判別関係の異常はそのバルブ操作によるものとみなされるので正常と判定される。次にそのような既知情報がなければ、管路異常とされる。この段階では、二つの場合に分けられる。すなわ

ち、もし $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ が異符号に変化したときは、漏洩のある破裂事故とされ、その漏洩流量が求められる。一方、もしも $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ が共に同符号の変化を示したときには、漏洩はなく圧力低下を及ぼす事故、すなわち閉塞事故と判定される。

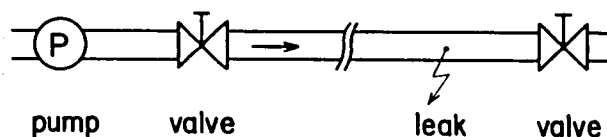
以上の処理は、サンプル時間 Δt 毎に繰り返して行われ、実時間で送水管路の状態が監視される。

5.4 シミュレーションによる検討

5.4.1 シミュレーションの方法

まず、管路の水の流れを解析するために、圧縮性流体の基礎方程式(2.5)式のモデルについてシミュレーションを行う。この種の波動方程式を解くためには、特性曲線法がよく用いられているが、⁽⁴⁷⁾ここでは四点インプリシット法^(1,29,30)を用いる。この数値計算法は、開水路の非定常流を表す双曲形偏微分方程式を解くために開発された方法であるが、境界条件が容易に組み入れられることや $(x-t)$ の格子を考えるため、任意の距離 x 及び時間 t における解が得られやすいこと等の特徴がある。(管路の非定常流に対する四点インプリシット法の定式化については、付録Cを参照)

さて、計算例に用いるモデル管路を第5.5図に示す。左端にポンプ、右端にバルブをもち、水は左から右に圧送され、ポンプに近い点に減圧弁が設置されているとする。



第5.5図 管路のモデル

ポンプ特性は吐出水頭 h_P と流量 q の関係が、次の二次式で与えられるものとする。

$$h_P = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 \quad (5.32)$$

ただし、ポンプの回転数は一定としている。末端のバルブの特性は流量 q と水頭 h の関係式として次式で与える。

$$q = K_V \sqrt{h} \quad (5.33)$$

ここに、 K_V はバルブ開度に相当する定数であり、ここでは通常 0.1466 の値を与え、バルブの閉鎖時には 0 とする。減圧弁についても同様の特性式を与える。

ポンプ、及び管路の特性定数を第 5.1 表に示す。管路は全長にわたって一様断面積をもち、摩擦損失は (5.26) 式で表し、また、水平管路とする。水中音速 c は 1000 m/s と仮定する。送水管路では通常、流速が 2 ~ 3 m/s であり、 $c \gg v$ である。管路長は $\ell = 1000$ m とするので、波動伝搬時間は $\Delta\tau = \ell/c = 1$ 秒である。

第 5.1 表 管路及びポンプのパラメータ

Pipe line		Pump	
ℓ	1000 m	a_0	54
D	0.8 m	a_1	0
f_d	0.0134	a_2	-4
c	1000 m/s		
θ	0.		

5.4.2 シミュレーション例の説明

ポンプが定常運転されているとき、つぎの5例についてシミュレーションを行い、水頭と流量の変動を解析する。5例の事故の種類、初期状態及び検証の目的を第5.2表にまとめて示す。

第5.2表 管路の異常事故検知に用いた計算例

計算例	事故あるいは異常の種類	初期状態	検証目的
例1	破裂事故	定常の流れ	破裂事故の検知
例2	バルブの閉鎖	定常の流れ	バルブ操作の検知
例3	圧力上昇による破裂事故	定常の流れ	破裂事故の検知
例4	中間バルブ閉鎖 (閉塞事故)	定常の流れ	閉塞事故の検知
例5	末端バルブの閉鎖	既存漏洩事故	既存事故点の検知

〔例1〕 定常状態において、管路の途中に破裂が生じて漏洩した場合を考える。破裂による漏洩のモデル式は、漏洩流量を q_F ，その点の水頭を h_F ，残存地盤高を z_F としたとき、

$$q_F = K_F (h_F - z_F)^{1.15} \quad (5.34)$$

とする⁽⁶⁷⁾。定数の K_F は破裂していないときにゼロとし、破裂によって 0.0023 に変化するものとする。ここでは、簡単のため $z_F = 0$ であり、 h_F がほぼ 50 m に近いので q_F は $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ の漏洩が生ずるとする。なお、管路の破裂前の定常流量は $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ としている。

また、a－b点間の定常時の摩擦損失水頭は3.4 mである。

〔例2〕 正常な管路で、末端のバルブを6秒間で閉鎖した場合に、水撃現象が発生することをみる。1000m長のこの管路では伝搬時間 $\Delta\tau = 1$ 秒である。通常、バルブ操作は、短い時間で閉鎖すると大きな圧力変動をもつ水撃現象が発生して負圧が生ずることがある。そこで、普通は $4\Delta\tau$ より長い時間で閉鎖するが、十分長くなければ周期 $4\Delta\tau$ の周期振動が発生する。ここでは $6\Delta\tau$ の時間で閉鎖した場合を調べる。

〔例3〕 正常な管路で末端のバルブを閉鎖していく途中で、バルブの閉鎖開始1秒後にある地点で破裂が生じた場合を考察する。これは、バルブ閉鎖に伴う圧力上昇のために管が破裂した場合に相当する。

〔例4〕 正常な管路において、管路の途中に設けたバルブを全開（100%開度）の状態から絞る（20%開度）場合を考える。これは一般の減圧弁操作に相当するが、事故により管が閉塞した場合にも相当する。

〔例5〕 既に管路の一部（600mの地点）に破裂があり、漏洩している管路において、末端のバルブを閉鎖することで水撃作用が発生した場合である。事故発生そのものの検知ではなく、既に存在する事故点を検知できるかどうかの検討を行う。

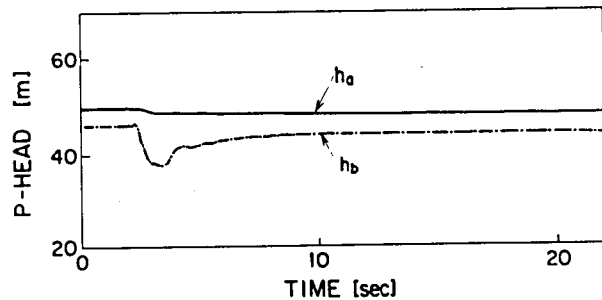
管路の非定常流のシミュレーションは、(2.5)式に対して四点インプリシット法を適用するが、その差分間隔として距離の刻みを $\Delta x = 100\text{m}$ とし、時間刻みを0.005秒とする。ただし、水頭や流量が急激に変化するときには、刻みを0.0005秒として精度を高めている。

次に状態判別関数の計算では、管路の両端における水頭及び流量の値を0.1秒のサンプリング間隔（5.3.1節の $\Delta t = 0.1$ 秒）で計測するとし⁺、更に $\delta_b(t)$ 及び $\delta_f(t)$ の時系列データの相関分析に用いるサンプル数を $n=60$ とする。

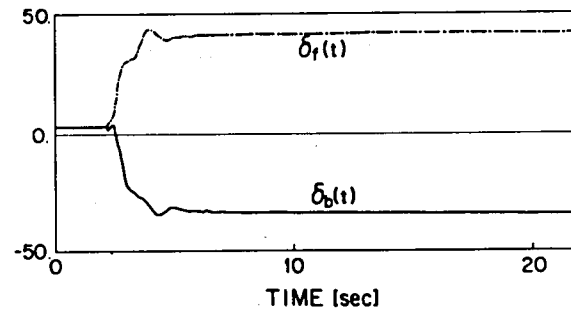
＋ 圧力計測器として半導体歪ゲージセンサを用いれば0.001秒までのサンプリングが可能である。また、流速ではホットフィルムセンサ等を用いれば、0.001秒までのサンプリングが可能である。

5.4.3 結果とその検討

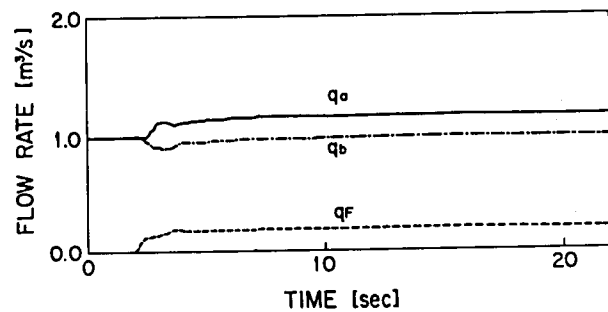
〔例1〕 時刻2秒において、a点から600mの地点で破裂事故が生じた場合である。第5.6図(a)にa点とb点の水頭変化 h_a と h_b を、また同図(b)に流量の変化 q_a と q_b 及び漏洩流量 q_F を示す。破裂によるショックはごく短い時間4, 5秒間の間に観測され、以後は定常状態となっている。これらの両端の水頭と流量から求めた状態判別関数 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ を同図(c)に示す。 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ の時系列データから事故点の位置標定をした結果を同図(d)に示す。5.5秒から8.5秒の間のデータ処理の結果、事故点が600mであるという正しい推定結果が出ている。0～5.5秒及び8.5秒以後のデータ処理では、同図(c)から明らかなように、 δ_b と δ_f の相関がなく、事故点の推定はできない。事故発生から、推定結果がでるまでに3.5秒間遅れるのは、時系列相関をとる処理に要するためである。事故検知は、このように計測量に大きな変化が生じる過渡的な状態から判別を行っていることがわかる。8.5秒以降では水の流れは定常状態に近づくが、同図(c)に示すように、 $\delta_b(t)$ 及び $\delta_f(t)$ が正常時に比較して大きな値をとり、また同図(b)に示すように計測値 q_a と q_b から漏洩が発生していることは検知できる。しかし、同図(c)に示すように δ_f と δ_b が8.5秒以降では相関がなくなり、事故点の位置標定はできない。



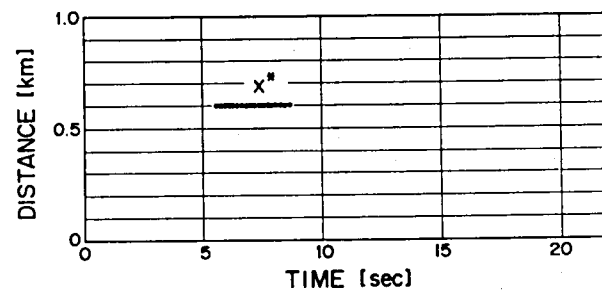
(a) 管路両端の水頭の変化



(c) 状態判別関数の変化



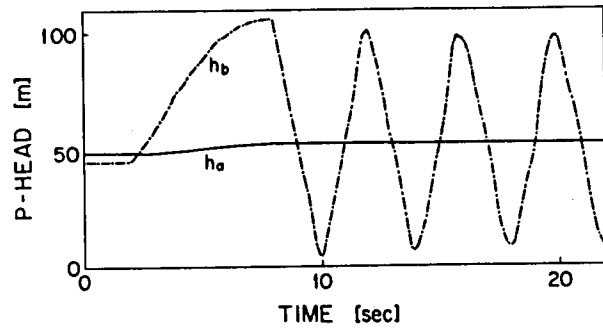
(b) 管路両端の流量と漏洩流量の変化



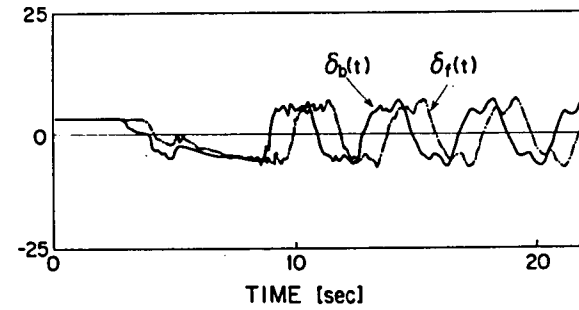
(d) 事故点の標定位置

第 5.6 図 例 1 における破裂事故の検知

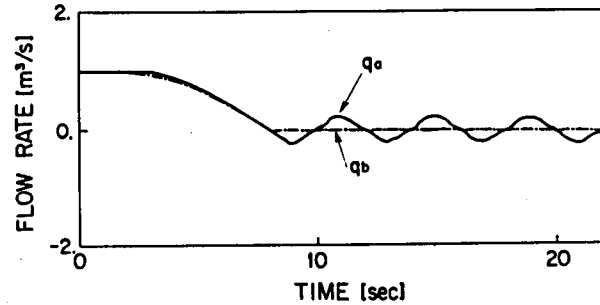
〔例2〕 管路は正常であり，末端のバルブを閉鎖した場合である。バルブは2秒時より絞り始め，8秒時に全閉とする操作を行う。第5.7図(a)に両端の水頭変化を示す。バルブの操作中は末端の水頭 h_R は徐々に上昇して行き，完全に閉鎖した瞬間から水頭は降下し始めて，以後振動が発生して持続する。この振動周期は4秒であり， $4l/c$ に等しい。一方，a点の水頭 h_a はポンプの特性に従って殆んど変化しない。同図(b)には，両端の流量の変化を示す。末端の流量 q_b は閉鎖後零となるが，始端の流量 q_a は振動が持続している。このような振動が一般に水撃現象と呼ばれている。この場合の状態判別関数 $\delta_f(t)$ を同図(c)に示し，事故点の標定結果を同図(d)に示す。管路は正常であり，末端のバルブが閉鎖されたために水撃作用が発生し，かつ始端で反射が生じているから，事故点は0 Kmの判定がでている。もちろん，この場合には異常ではなく末端バルブの操作が既知であるから，正常と判定される。



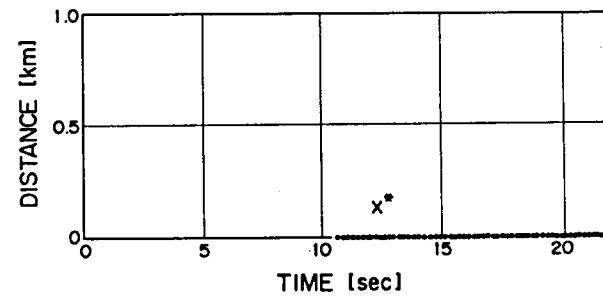
(a) 管路両端の水頭の変化



(c) 状態判別関数の変化



(b) 管路両端の流量の変化



(d) 異常点の標定位置

第 5.7 図 例 2 における末端バルブ閉鎖の検知

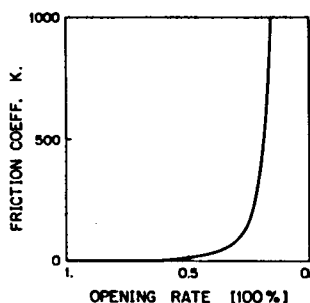
〔例3〕 2秒時に末端のバルブを閉鎖し始め、その影響で管内の水頭が上昇し、管のある部分で破裂事故が発生した場合である。バルブは時刻8秒時に全閉となる。第5.8図(a)に水頭変化を、同図(b)に流量変化を示す。水頭は破裂時に一旦下降するが、バルブ全閉まで上昇を続ける。全閉後には水頭変化に振動が見られるが減衰が著しい。これは破裂に伴う漏洩により外部にエネルギーが失われるためと考えられる。このときの状態判別関数と事故標定結果を同図(c)及び(d)に示す。標定位置は0.55 Km～0.65 Kmであり、シミュレーションで設定した600 mの地点に対して、ほぼ正確な推定結果である。ここでは、サンプル間隔を0.1秒としているので、(5.31)式から明らかなように、相互相関係数から得た k^* が±1の誤差をもつと、時系列データのずれ $\Delta\tau^*$ は±0.1秒の誤差をもち、従って、標定位置の距離の誤差は、(5.19)式から $\pm 0.1/2 \times c = \pm 50$ mである。

〔例4〕 管路は正常であるが、2秒時に始端a点より200 mの位置にあるバルブを閉じ始め、11.6秒時に20%開度まで絞った場合である。バルブ特性としてそのバルブ損失水頭 h_ℓ と流量の関係を次式で与える。

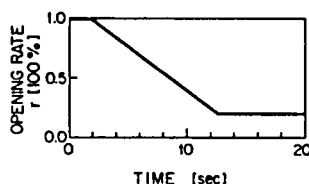
$$h_\ell = K_\ell q |q|$$

ここに、 K_ℓ はバルブ開度 r で決まる損失係数で、

$$K_\ell = 8.0 \{ \exp(1/r - 1) - 1 \}$$

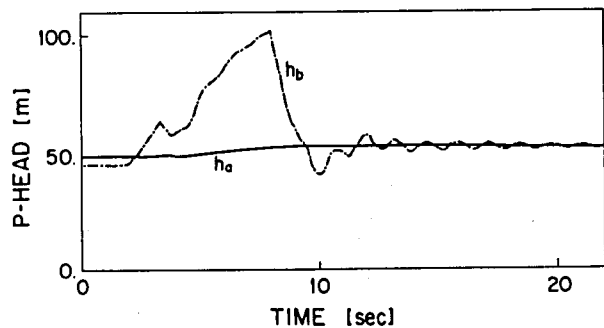


(a) 開度と抵抗係数の関係

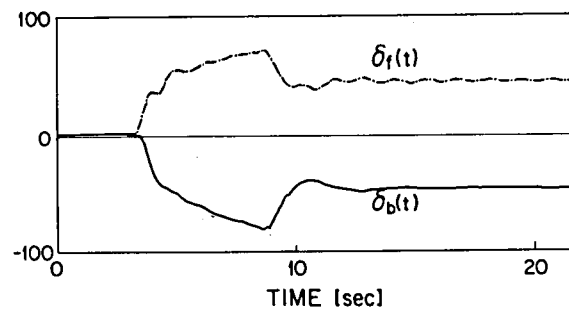


(b) 開度の変化パターン

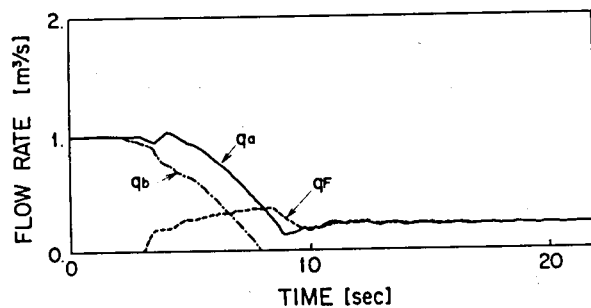
第5.9図 管路の中間にあるバルブの特性



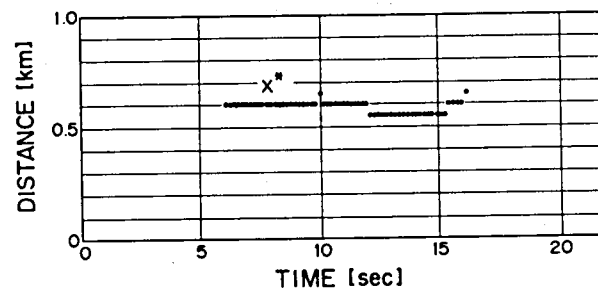
(a) 管路両端の水頭の変化



(c) 状態判別関数の変化



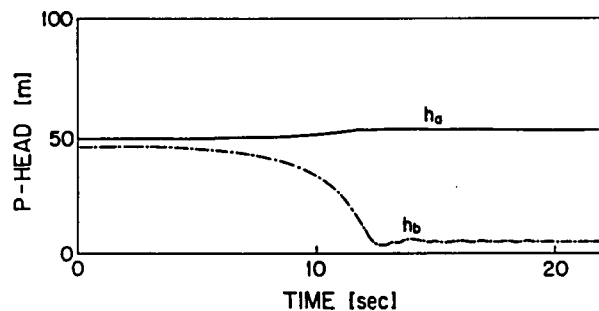
(b) 管路両端の流量と漏洩流量の変化



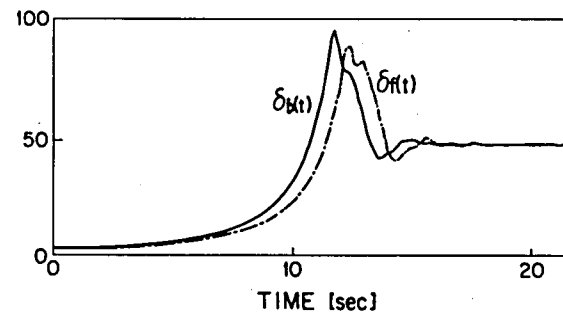
(d) 事故点の標定位置

第 5.8 図 例 3 における破裂事故の検知

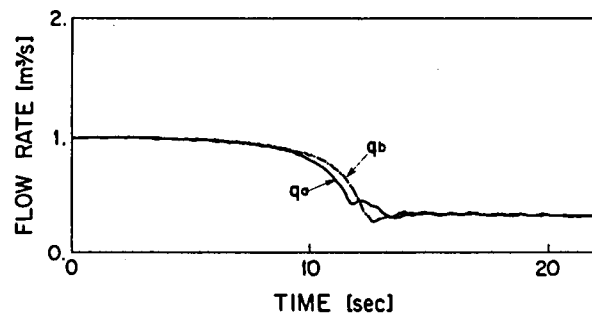
によって近似的に与え、開度 r は時間 t の関数で与える。これらを第 5.9 図(a), (b)に示す。100%開度では $K_\ell = 0$ 、20%開度では $K_\ell = 428.8$ の値をもつ。このときの両端の水頭変化を第 5.10 図(a)に示す。末端の b 点の水頭 h_b が徐々に減少して、減圧弁としての効果が現れている。始端すなわち、ポンプの吐出水頭は、(5.32)式から明らかなように、ポンプ回転数を一定としているので、流量の減少に対して若干の上昇がある。次に、両端の流量の変化を同図(b)に示す。流量も開度を絞るにつれて減少していく様子がわかる。状態判別関数を同図(c)に示す。この場合には前述の例 1 及び例 3 と異なり、 $\partial_b(t)$ 、 $\partial_f(t)$ は共に正方向に変化し、流量収支に異常がなく、水頭損失に変化があったことを示している。事故点の標定結果を同図(d)に示す。事故点は 0.15~0.2km であるという結果を得た。しかし、この場合には、200m 地点のバルブの操作は既知であるので、管路は正常であると判定される。一方、このような例は管路の一部が閉塞して、断面積が減少した場合にも担当すると考えられる。従って、既知のバルブが操作中であるということがなければ、管路閉塞事故の判定がされる。



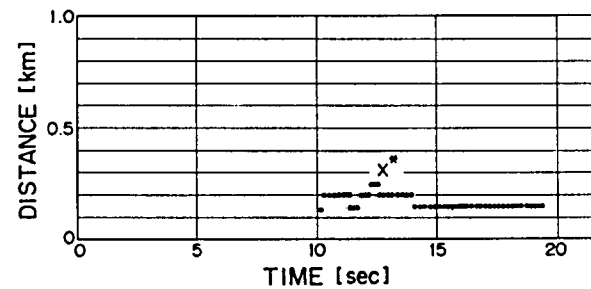
(a) 管路両端の水頭の変化



(c) 状態判別関数の変化



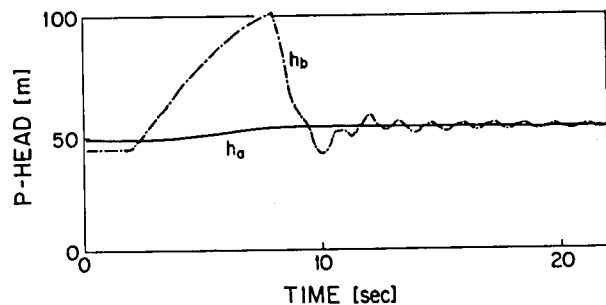
(b) 管路両端の流量の変化



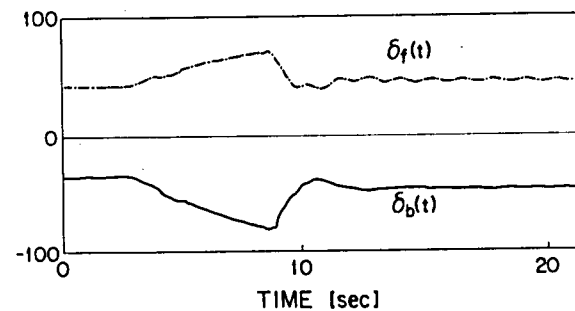
(d) バルブの標定位置

第 5.1 0 図 例 4 における中間バルブの作動の検知

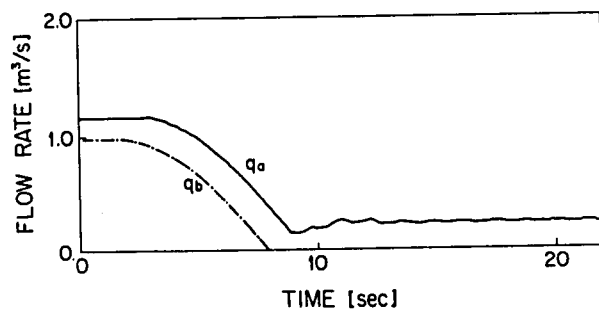
〔例5〕 管路の600mの地点で既に漏洩がある場合に、末端のバルブを閉鎖したために、水撃作用が起きた場合である。第5.11図(a)に両端の水頭変化を示す。バルブは2秒時より閉じ始め、8秒時に全閉としている。末端の水頭 h_b は閉鎖後振動が生じるが、例2と比較して小さく、その減衰が速いことが明らかである。これは、漏洩点からエネルギーが失われるためと考えられる。なお、漏洩流量のモデル式は例1及び例3と同様に(5.34)式を用いる。両端の流量の変化を、同図(b)に示す。 q_b はバルブ全閉後零となるが、 q_a は漏洩量分だけの値をもつことがわかる。次に、状態判別関数を同図(c)に示す。漏洩があるので、 $\delta_b(t)$ と $\delta_f(t)$ は正負逆に変化している。その事故点標定の結果を同図(d)に示す。シミュレーションで設定した破裂個所は600mであるが、10秒以後の標定結果では600mの位置標定の結果がでている。これは同図(c)からわかるように、バルブが閉鎖されて δ_f 及び δ_b の値が減少し始めた時からのデータによる相関から求められた結果である。一方、10秒以前の標定では、それに用いる δ_f 及び δ_b の変化が同図(c)からわかるように、比較的滑らかであるために、 δ_f と δ_b の時系列パターンのずれ $\Delta\tau^*$ を求めるのに、 K^* が一つの値に定まらず、標定結果として x^* の値にばらつきが見られる。このことから、実際の応用にあたっては標定結果 x^* が同図(d)のような不連続な値を示す場合には、雑音として除く方が望ましいといえる。



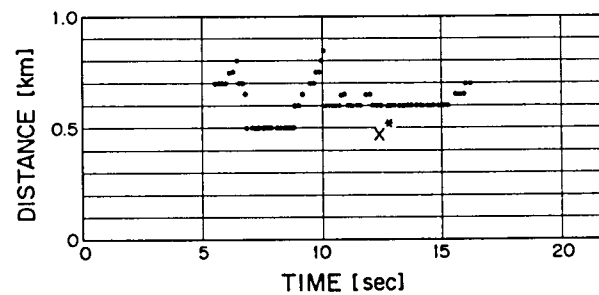
(a) 管路両端の水頭の変化



(c) 状態判別関数の変化



(b) 管路両端の流量の変化



(d) 事故点の標定位置

第 5.1 1 図 例 5 における既存破裂事故の検知

以上の5例のシミュレーションにより、次の事項が明らかとなった。

(i) 状態判別関数は、管路の状態変化を反映している。

(ii) 事故点標定の結果は、ほぼ正確な推定をしている。

(iii) 事故の検知は、状態判別関数の変化の大きい過渡的な時間帯で可能で、定常状態におちつくと $\partial_b(t)$ と $\partial_f(t)$ の間に相互相関性がなくなり、事故点の位置標定ができない。

(iv) 破裂事故の場合には、漏洩量 q_F の推定が可能である。

(v) 閉塞事故（或はバルブ閉操作）では、損失水頭増加分 h_ℓ の推定が可能である。

この結果、管路の両端の圧力及び流量の観測値の時系列データから得られる状態判別関数によって、管路の事故の発生の検知、その事故の種類の判別及び事故点の位置標定を行うことが可能であるといえる。

5.5 結 言

送水管路の監視方式として、圧縮性流体の特徴である圧力と流速（流量）の変動が、管路中を進行波として伝搬する現象に着目した新しい方法を提案し、その有効性をシミュレーションによって明らかにした。

まず、管路の2点における圧力と流量の間に成立するシュナイダーベルジェロンの関係式を導き、これを管路の状態判別関数として定義した。次に、この状態判別関数によって事故の発生の検知、事故の種類の判定及び事故点の位置の標定が可能であることを理論的に示した。次に、実際への応用にあたって、圧力及び流量の計測データの時系列を統計的に処理することで、事故の判別を行う手続きを明確にした。状態判別関数は、管路の流れについての線形近似モデルから導いたが、圧縮性流体の非定常流モデルとの比較検討から判別関数に許容誤差を導入することで、近似モデルで無視した摩擦損失の影響を考慮することができることを述べた。最後に、五つの典型的な事例についてシミュレーションによる検討を行い、破裂事故、水撃現象及び閉塞事故の事故に対して、本章で提案した進行波特性を利用した異常検知方式が十分適用できることが確かめられた。

本論文は、水輸送システムに関して、その基本的な考察を行った。水輸送システムは、その運用目的の種類及び水理現象の時間尺度の観点から、多面的な方法論及びシステム技術を必要とするが、特に考察の対象として、配水管網の解析手法、地域送水運用計画の最適化手法、及び送水管路の異常検知の方法の三つの課題を取り上げた。それらの考察の結果、次の結論を得た。

(I) 配水管網の解析手法

- (i) 連続写像法を用いることによって、パラメータが変化する場合の流量の変化の状況を、連続的に追跡することが可能である。
- (ii) 管路摩擦損失水頭の特徴は、真に単調増加であること、及び配水管網のシステム方程式は正則条件を満足する連続写像として定義できることから、連続写像によって生成される解軌跡は、連続でかつ唯一つ存在する。
- (iii) 解軌跡はダビデンコの微分方程式で表され、その数値解法としては、オイラー公式による積分及びニュートン-ラフソン法によるシステム方程式の求解の併用が、計算精度及び計算速度の点から推奨できる。

以上のように、連続写像法によって、パラメータに関する配水管網の流量解のもつ性質、及び解軌跡の追跡手法の評価が、第3章において明らかにされた。

(II) 地域送水運用計画問題

- (i) 地域及び時間に関する二重分割が可能であり、各々複数の部分問題に分解される。
- (ii) 分割により得られた部分問題は、2レベル法によって効率的に解かれる。
- (iii) 二重分割法は、他の従来法と比較して、プログラムの大きさ及び計算速度の点で有利である。

こうして、大規模な数理計画問題であった送水運用計画問題が、地域と時間という理解の容易な概念を用いた分割によって、効率的に解かれることが、第4章において明らかにされた。

Ⅳ 送水管路の異常検知法

- (i) 圧縮性流体中を伝搬する波動に着目し、シュナイダー－ベルジェロンの関係式を状態判別関数として利用できる。
- (ii) 破裂事故及び閉塞事故の判別と事故点位置の検知が、状態判別関数によって可能である。
- (iii) 管路に発生した異常を、実時間で検知することができる。

この状態判別関数を用いれば、従来実時間で検知できなかった破裂事故及び閉塞事故の検知が可能であることが、第5章においてシミュレーションによって示され、明らかにされた。

今後に残された主な問題としては、次の三点が挙げられる。

第一に、配水管網のパラメータとして選んだのは、管路摩擦損失特性に関するものであり、配水管網のグラフ構造が変化する場合は扱っていない。グラフ構造の変化は、連続写像における非線形代数方程式の次元が変化することに対応している。一方、連続写像は同次元空間の間で定義されており、次元が異なる場合には扱えない。しかし、このような次元が変化する場合は扱える連続写像が定義できれば、バルブ開閉による配水網の構造変化の影響、あるいは管路の敷設計画の問題等の解決に有効な手段を与えられられる。

第二に、送水運用計画問題を二重分割法で解く場合、その収束条件の議論は、変数が連続値を取ることを前提としている。すなわち、変数が離散値しか取り得ない場合を扱っていない。このような離散系を含む場合には、混合整数計画法が適用されるが、二重分割を施すと実行可能でない部分問題が生じる恐れがある。実際、ポンプの運転には、台数運転などの離散値しかとり得ない場合もあり、そのような問題に対する分割の方法と、その収束条件を明らかにすることは、今後に残された課題である。

第三に、管路の異常検知法では、波動の伝搬速度の値を正確に把握していると仮定している。しかし、実際には、伝搬速度は管路の材質やその周囲の支持体によって影響される。更に、非常に激しい水撃作用では、水柱分離によって空気が

水中に発生し、この空気によって伝搬速度 c の値は大きく変化する。これらのことから、現実への応用に際しては、この伝搬速度を正確に同定する手段の開発が必要であろう。

参 考 文 献

1. M.Amein, et al : " Implicit Flood Routing in Natural Channel ",
Journal of the Hydraulics Division, ASCE 96-HY12, pp.2481-
2500 (1970)
2. H.Chrostowski,Z.Domagala : "An Investigation of Transients in of
Pump System aften Cutting out of Drive Pnmp", Proc.of Couf.of
Fluid Mach. 6, 1. (1979)
3. E. S. Cole : "Methods of Leak Detection ; An Overview", Journal
American Water Works Association, 71-2, pp. 73-75 (1979)
4. M. A. Collins et al : " Multiple Operating Points in Complex Pump
Networks ", Journal of the Hydraulics Division, ASCE 105-HY3,
pp. 229-244 (1979)
5. T. F. Conry, D. P. Schneider : "Optimal Selection of Pumps in an
Hydraulic Network", Transactions of ASME, Journal of Fluids
Engineering. 2, March (1976)
6. B. Coulbeck, M. J. H. Sterling : "Optimized Control of Water
Distribution System", Proceedings of the Institute of Electrical
Engineers, 125, 1039 (1978)
7. C. A. Desoer and F. F. Wu : "Nonlinear Monotone Networks", SIAM Jour.
Ap. Math., 26, 315 (1974)
8. B. Donsky et al : "Upsurge and Speed-Rise Charts Due to Pump
Shutdown", Journal of the Hydraulics Division, ASCE 105-HY6,
pp. 661-674 (1979)
9. 土木学会 : " 水理公式集 ", pp. 313-321 (昭 38)
10. 土木学会編 : " 土木工学における数値解析／流体解析編 ", サイエンスラ
イブラリ 情報電算機=30 サイエンス社 (昭 49)

11. F.Fallside, et al: "Hierarchical Optimization of a Water Supply Network", Proceedings of Institute of Electrical Engineers, 122, 202 (1975)
12. F.Fallside and P.F.Perry: "Optimal Control of a Water Supply Network by a Decomposition Technique", Dept. of Engineering, Cambridge University, ELEC/TR 20 (1974)
13. W.Frey, P.Althammer: "The Calculation of Electromagnetic Transients on Lines by Means of a Digital Computer", The Brown Boveri Review, 48, 56 (1961)
14. 福田: "パラメトリック求解法による配水管網の解析", 電学論 C, 101, 5 (昭 56-5)
15. T.Fukuda: "Parametric Approach to Water Supply Network Analysis", Electrical Engineering in Japan, 101, No.3 (1981)
16. 福田: "地域および時間分割による送水運用計画の最適化", 電学論 C, 102, 9 (昭 57-9)
17. T.Fukuda: "Regional-temporal Decomposition Technique for Optimization of Water Distribution Scheduling", Electrical Engineering in Japan, 102, No.5 (1982)
18. 福田: "進行波特性による送水管の異常検知法", 第 21 回 SICE 学術講演会会予講集 (昭 57)
19. 福田: "進行波理論による送水管路の異常検知法", 計則自動制御学会論文集, 18, 10, (昭 57-10)
20. 福田, 小沢: "上水道の送配水網の制御", 小特集 上水道における制御システム, 電学誌 101, 187 (昭 56-3)
21. 福田, 他: "送配水系統の監視, 制御システム", 三菱電機技報, 55, 10, pp. 17-20 (昭 56)
22. T.Fukuda: "A Parametric Nonlinear Programming", IEEE Proc. International Conf. on Cybernetics and Society, Denver (1979)

23. 福田： “パラメトリック非線形計画法の一考察”，電気学会全大，（昭 55）
24. C.B.Garcia and W.I.Zangwill： “An Approach to Homotopy and Degree Theory”，Mathematics of Operations Research, vol. 4 No.4, pp. 390-405. (1979)
25. 畠山，他： “上水道ネットワークにおける流量－圧力配分の最適化”，電学論C， 98， 289（昭 53-9）
26. 波多野，他： “ディジタル演算器を使った配水管路異常検知装置”，第34回水道研究発表会（昭 58）
27. 平松，長谷川： “ポンプおよび配管の防振”，建築設備と配管工事，増刊号 168/176（昭 54）
28. 岩佐： “水理学”，朝倉土木講座 3（昭 52）
29. 神田，北田： “不定流の数値計算法に関する Critical Review”，建設工学研究所報告，（昭 50-5）
30. T.Kanda, T.Kitada： “An Implicit Method for Unsteady Flows with Lateral Inflows in Urban Rivers”，Proc. of International Association for Hydraulic Research, Dusseldorf (1977)
31. 小館： “利水システムにおける計画問題”，システムと制御， 22， 138（昭 53-3）
32. 小島： “連続変形法による不動点の計算－講座－数値計画法の展開をさぐる”，システムと制御， 25， 7（昭 56）
33. 駒谷，福田： “二項関係の強さを考慮した構造化手法－Revised ISM”，電学論C， 101， 5（昭 56-5）
34. L.S.Lasdon, A.D.Ware： “The Status of Nonlinear Programming Software”，Operations Research, 27, 3, pp. 421-456 (1979)
35. L.S.Lasdon, et al： “Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming”，ACM Trans. Math. Software, 4, 34 (1978)

36. D.G.Luenberger : "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley (1973)
37. D. Macko, Y. Y. Haimes : "Overlapping Coordination of Hierarchical Structures", IEEE Trans. Syst. Man and Cybernetics, SMC-8, 745 (1978)
38. 松本, 宮岡 : "大規模上水道のための時空間階層形運用計画手法", 電学論 C, 102, 109, (昭 57-5)
39. 松本, 大成 : "上水道トータルシステムの実際", 小特集 上水道に於ける制御システム, 電学誌 101, 187 (昭 56-3)
40. S. R. Mendu, Y. Y. Haimes, D. Macko : "Computational Aspects of Overlapping Coordination Methodology for Linear Hierarchical Systems", IEEE Trans. Syst. Man and Cybernetics SMC-10. 68(1980)
41. 宮岡, 松本, 大成 : "非線形特性をもつネットワークの定常流解析手法", 電気学会全大, (昭 53)
42. 宮岡, 松本 : "最小費用流計算による管路網解析法", 電学論 C, 101, 277 (昭 57-3)
43. 宮岡, 船橋 : "ネットワークフロー理論の応用による大規模配水システムの圧力最適化法", 電学論 C, 102, 59, (昭 57-3)
44. 中堀, 福田 : "送水システムの解析と最適運用法", 三菱電機技報, 51, 11, pp. 722-725, (昭 52)
45. 西川, 宇土, 尾崎 : "配水管網の設計と圧力制御のための汎用管網計算法", 水道協会雑誌, 53, 2, pp. 2-20 (昭 59-2)
46. 西川, 宇土 : "信頼性を考慮した配水管網の最適設計法", 水道協会雑誌, 53, 5, pp. 2-12 (昭 59-5)
47. 西原, 谷内 : "非線形波動", 岩波書店応用数学叢書 (昭 52)
48. J. T. Oden : "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw Hill (1972)

49. R. Oldenburger, J. Donelson, Jr. : "Dynamic Response of Hydroelectric Plant", AIEE Transactions, Power Apparatus and Systems, vol. 81, Oct. (1962)
50. 鬼塚 : "状態空間解析による枝わかれ管路のサージング減衰特性の評価", 土木学会報告集, 262, 6 (昭 52)
51. J.M.Ortega and W.C.Rheinboldt : "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables ", Academic Press (1970)
52. S.A.Otten Stein : "System and Method for Locating Breaks in Liquid Pipelines", United States Patent 3851521 Dec., 3 (1974)
53. 大里, 他 : "輸送遅れをもつ上水道系の階層的最適化", 電学論 C, 99, 103 (昭 54-5)
54. 大塚 : "送配水系統の水撃解析プログラム", 全国水道研究発表会 (昭 52)
55. 小沢 : "配水管網における末端圧保持問題の解法", 電子通信学会資料 CST 76-60 (昭 51)
56. 小沢, 他 : "大規模送水系統におけるポンプ場運用計画の決定法", 電気学会研資 SC-80-19, (昭 55-9)
57. S.L.Richter and R.A.DeCarlo : "Continuation Methods : Theory and Applications ", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-28 pp. 660-665, June (1983)
58. 斉藤 : "送水系の最適化と重み係数決定法に関する考察", 計測自動制御学会論文集, 19, 6, (昭 58-6)
59. 斉藤, 小林 : "需要予測と水量配分計画", 小特集 上水道における制御システム, 電学誌 101, 187 (昭 56-3)
60. 坂口, 他 : "波動理論による送電線保護 (その 1. 理論) 電学論 B 98-B, No 1 (昭 53-1)
61. 坂口, 他 : "波動理論による送電線保護 (その 2. 実用化方式の検討) 電学論 B, 98-B, No 8 (昭 53-8)

62. 里見： “水撃対策の進歩 ー日本報告ー”，水道協会雑誌 558， pp. 38
ー45（昭 56）
63. 関口，他： “脚光をあびる上水道運用管理のシステム化”，電学誌 99，
19（昭 54-1）
64. “水道用ポンプ設備特集”，水道協会雑誌，No 554（昭 55-11）
65. Y. Takahashi, M. J. Rabins, D. M. Auslander： “Control and Dynamic
Systems”，Addison-Wesley（1970）
66. 高桑： “配水ネットワークの解析法とその応用”，電学誌 96， 527
（昭 51-6）
67. 高桑： “配水管網の解析と設計”，森北出版（昭 53）
68. 田村： “多段階決定過程における分布おくれモデルの双対問題とその分割，”
計測自動制御学会論文集，10， 468，（昭 49-8）
69. 築山，福田： “あいまい情報による変数推定法と配水管網への応用”，計
測自動制御学会論文集，17， 887，（昭 56-9）
70. 常松： “水の輸送ー配分システムの解析に関する研究”，京都大学 博士
論文，（昭 48-3）
71. C. S. Watt, et al： “Hydraulic Transients Following Valve Closure”，
Journal of the Hydraulic Division, ASCE 106-HY10, pp.1627-1640
（1980）

付 録 A

二重分割の部分問題における最適条件の導出

[A . 1] 時間分割した部分問題の最適条件

ラグランジュ関数 L を k に関する和の形に展開し直すと，次のように表される。

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{k=1}^M [W_{11} U_1(k) + W_{12} U_2(k) + \dots + W_{1N} U_N(k) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j \in O_1} W_{21} \sigma_{1j}^2(k) + \dots + \frac{1}{2} \sum_{j \in O_N} W_{2N} \sigma_{Nj}^2(k) \\
 & + \frac{1}{2} W_{31} \{U_1(k) - U_1(k-1)\}^2 + \frac{1}{2} W_{31} \{U_1(k+1) - U_1(k)\}^2 \\
 & + \dots \\
 & + \frac{1}{2} W_{3N} \{U_N(k) - U_N(k-1)\}^2 + \frac{1}{2} W_{3N} \{U_N(k+1) - U_N(k)\}^2 \\
 & + \frac{1}{2} W_{41}(k) \{V_1^{\max} - V_1(k)\}^2 + \dots + \frac{1}{2} W_{4N}(k) \{V_N^{\max} - V_N(k)\}^2 \\
 & - \lambda_1(k) V_1(k) - \lambda_2(k) V_2(k) - \dots - \lambda_N(k) V_N(k) \\
 & + \lambda_1(k+1) V_1(k) + \lambda_2(k+1) V_2(k) + \dots + \lambda_N(k+1) V_N(k) \\
 & + \lambda_1(k) U_1(k) + \lambda_2(k) U_2(k) + \dots + \lambda_N(k) U_N(k) \\
 & - \lambda_1(k) D_1(k) - \lambda_2(k) D_2(k) - \dots - \lambda_N(k) D_N(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda_1(k) \sum_{j \in O_1} \sigma_{1j}(k) - \lambda_2(k) \sum_{j \in O_2} \sigma_{2j}(k) - \dots \\
& \dots - \lambda_N(k) \sum_{j \in O_N} \sigma_{Nj}(k) \\
& + \sum_{j \in O_1} \lambda_j(k) \sigma_{1j}(k) + \sum_{j \in O_2} \lambda_j(k) \sigma_{2j}(k) + \dots \\
& + \sum_{j \in O_N} \lambda_j(k) \sigma_{Nj}(k)]
\end{aligned}$$

ただし、 $\lambda_j = 0$ とし、 $U_i(0)$ は所与の初期値である。変数 $U_i(k)$, $V_i(k)$, $\sigma_{ij}(k)$, ($i=1, \dots, N$) についての微分を施すことにより、本文中の時間分割における部分問題の解を与える (4.36) ~ (4.38) 式を得る。

〔 A . 2 〕 地域分割した部分問題の最適条件

ラグランジュ関数を地域 i の和の形に展開し直す。ただし，融通水量 σ_{ij} は地域 i から送水する要素に関して，まとめ直して固定した値とする。 i の和の形であるので，地域分割の部分問題を得る。

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{i=1}^N [W_{1i} U_i(1) + W_{1i} U_i(2) + \cdots + W_{1i} U_i(M) \\
 & + \frac{1}{2} W_{2i} \sum_{j \in O_i} \{ \sigma_{ij}^2(1) + \sigma_{ij}^2(2) + \cdots + \sigma_{ij}^2(M) \} \\
 & + \frac{1}{2} W_{3i} \{ U_i^2(0) - 2 U_i(0) U_i(1) + U_i^2(1) \\
 & \quad + U_i^2(1) - 2 U_i(1) U_i(2) + U_i^2(2) \\
 & \quad \cdots \cdots \\
 & \quad + U_i^2(M-1) - 2 U_i(M-1) U_i(M) + U_i^2(M) \} \\
 & + \frac{1}{2} W_{4i}(k) \{ (V_i^{\max} - V_i(1))^2 + \cdots + (V_i^{\max} - V_i(M))^2 \} \\
 & + \{ -\lambda_i(1) V_i(1) - \lambda_i(2) V_i(2) - \cdots - \lambda_i(M) V_i(M) \} \\
 & + \{ \lambda_i(1) V_i(0) + \lambda_i(2) V_i(1) + \cdots + \lambda_i(M) V_i(M-1) \} \\
 & + \{ \lambda_i(1) U_i(1) + \lambda_i(2) U_i(2) + \cdots + \lambda_i(M) U_i(M) \} \\
 & + \{ \lambda_i(1) D_i(1) + \lambda_i(2) D_i(2) + \cdots + \lambda_i(M) D_i(M) \} \\
 & + \sum_{j \in O_i} \{ -\lambda_i(1) \sigma_{ij}(1) - \lambda_i(2) \sigma_{ij}(2) - \cdots - \lambda_i(M) \sigma_{ij}(M) \}
 \end{aligned}$$

$$+\lambda_j(1)\sigma_{ij}(1)+\lambda_j(2)\sigma_{ij}(2)+\cdots\lambda_j(M)\sigma_{ij}(M)\}}]$$

上式の各 i について，変数 $U_i(k)$, $V_i(k)$ に関する微分から，（ 4.4 6 ），
（ 4.4 7 ）式を得る。ただし，この分割では，融通水量 σ_{ij} は固定されている。

付 録 B

管路の非定常流モデルにおける連続方程式について

管路中の圧縮性流体の連続方程式は，次式で表される。

$$\frac{\partial A \rho}{\partial t} + \frac{\partial A v \rho}{\partial x} = 0 \quad (B-1)$$

上式を展開すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} (B-1) &= \frac{\partial A \rho}{\partial t} + v \frac{\partial A \rho}{\partial x} + A \rho \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= A \rho \left\{ \frac{1}{A \rho} \frac{\partial A \rho}{\partial t} + \frac{v}{A \rho} \frac{\partial A \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ &= A \rho \left\{ \frac{1}{A \rho} \left(1 + v \frac{dt}{dx} \right) \frac{\partial A \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

$\frac{dx}{dt} = c$ であるから，

$$= A \rho \left\{ (1 + v/c) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

$$\text{ここに, } \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{E}, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{D}{e E_s}$$

であり，かつ

$$c^{-1} = \sqrt{\rho \left(\frac{1}{E} + \frac{D}{e E_s} \right)}$$

である⁽²⁸⁾。ただし， $1/E$ は流体圧縮率， e は管厚， E_s は管の弾性係数である。

従って、(B - 1) 式は、

$$\begin{aligned} (B - 1) \text{ 式} &= A \rho \left\{ (1+v/c) \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、本文中 (2.7) 式を得る。(B - 1) 式は更に展開して、 $p = \rho g (h - z)$ を考慮すれば

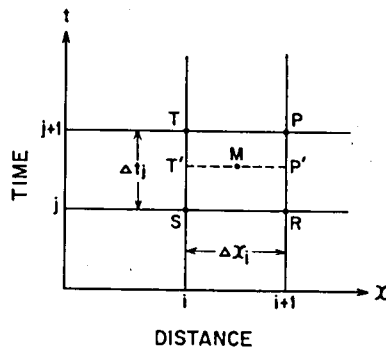
$$\begin{aligned} (B - 1) \text{ 式} &= A \rho \left\{ \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ &= A \rho \left\{ \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g}{c^2} v \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{A \rho g}{c^2} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、(2.4) 式を得る。

四点インプリシット法による非定常管路流の解析

管路を流れる水の動きを表現する非定常流の基本方程式である双曲形偏微分方程式 (2.5) 式を解くための数値解法として、従来、よく用いられているのは特性曲線法、ツーステップラックス-ベンドロフ (Lax-Wendloff) 法、リープフロッグ (蛙跳び) 法等である⁽¹⁰⁾。

ここでは、陰的な代数方程式系を各時刻で解くアルゴリズムである四点インプリシット法を適用し、その数値解析法について述べる。四点インプリシット法は、元来、開水路のような自由表面をもつ非定常流 (不定流) に対して提案されたものであり⁽¹⁾、管路の非定常流に対しては、これまで適用されたことがない。



第 C.1 図 四点インプリシット法による $x-t$ 平面の格子

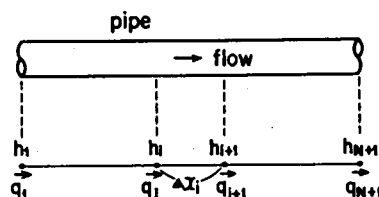
四点インプリシット法では、独立変数 (x, t) を任意の幅で $\Delta x, \Delta t$ で差分化し、格子を C-1 図のように設ける。変数 $\alpha(x, t)$ の偏微分値を次式で定義する。ここに、R, S, T, P, M は格子の各点を示す。

$$\frac{\partial \alpha(M)}{\partial t} = \frac{1}{2} [\alpha(P) + \alpha(T) - \alpha(R) - \alpha(S)] / \Delta t \quad (C-1)$$

$$\frac{\partial \alpha(M)}{\partial x} = \{ (1-\theta) [\alpha(R) - \alpha(S)] + \theta [\alpha(P) - \alpha(T)] \} / \Delta x \quad (C-2)$$

ここに、 $0.5 \leq \theta < 1$ で、通常 0.5 近くの値が用いられる。

さて、対象とする管路を Δx_i 毎に N 個分割し、番号を C-2 図のようにつける。時間の軸は Δt_j で M 個に分割する。



第 C.2 図 四点インプリシット法における管路の距離区分

四点インプリシット法による定式化を次の方程式で説明しよう。ただし、(2.5) 式において、流速 v のかわりに流量 q を用いている。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{A} \frac{\partial q}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{f_d}{2AD} |q| q = 0 \quad (C-3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{A} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{q}{A} \sin \theta = 0 \quad (C-4)$$

ここに、 $\sin \theta = dz/dx$ である。(C-3) 及び (C-4) 式各々を差分近似して、得た方程式を F_i^j 及び G_i^j とする。すなわち、

$$\begin{aligned} F_i^j &= (q_{i+1}^{j+1} + q_i^{j+1} - q_{i+1}^j - q_i^j) / 2 \\ &+ \{ (1-\theta) [(q_{i+1}^j)^2 / A_{i+1} - (q_i^j)^2 / A_i] \\ &+ \theta [(q_{i+1}^{j+1})^2 / A_{i+1} - (q_i^{j+1})^2 / A_i] \} \Delta t_j / 2 \Delta x_i \\ &+ \{ (1-\theta) [A_{i+1} h_{i+1}^j - A_i h_i^j] + \theta [A_{i+1} h_{i+1}^{j+1} - A_i h_i^{j+1}] \} g \Delta t_j / \Delta x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ (1-\theta) [q_{i+1}^j | q_{i+1}^j | f_{di+1}/2D_{i+1} A_{i+1} + q_i^j | q_i^j | f_{di}/2D_i A_i] \\
& + \theta [q_{i+1}^{j+1} | q_{i+1}^{j+1} | f_{di+1}/2D_{i+1} A_{i+1} + q_i^{j+1} | q_i^{j+1} | f_{di}/2D_i A_i] \} \Delta t_j / 2 = 0 \\
& (i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M) \quad (C-5)
\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
G_i^j &= (h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1} - h_{i+1}^j - h_i^j) / 2 \\
& + c^2 \{ (1-\theta) [q_{i+1}^j / A_{i+1} - q_i^j / A_i] + \theta [q_{i+1}^{j+1} / A_{i+1} - q_i^{j+1} / A_i] \} \Delta t_j / \Delta x_i \\
& + \{ (1-\theta) [q_{i+1}^i / A_{i+1} + q_i^j / A_i] + \theta [q_{i+1}^{j+1} / A_{i+1} + q_i^{j+1} / A_i] \} \\
& \times \{ (1-\theta) [h_{i+1}^j - h_i^j] + \theta [h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}] \} \Delta t_j / 2 \Delta x_i \\
& - \{ (1-\theta) [q_{i+1}^j / A_{i+1} + q_i^j / A_i] + \theta [q_{i+1}^{j+1} / A_{i+1} + q_i^{j+1} / A_i] \} \Delta t_j / 2 \Delta x_i \\
& - \{ (1-\theta) [q_{i+1}^j / A_{i+1} + q_i^j / A_i] + \theta [q_{i+1}^{j+1} / A_{i+1} + q_i^{j+1} / A_i] \} \sin \theta_i \cdot \Delta t_j / 2 \\
& = 0 \quad (i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M) \quad (C-6)
\end{aligned}$$

を得る。

上の二式は、管路の N 個のセクションに対して成立しており、 $2N$ 個の方程式となる。一方、未知変数は各時刻において、 $q_1^{j+1}, \dots, q_{N+1}^{j+1}$ および $h_1^{j+1}, \dots, h_{N+1}^{j+1}$ の $2(N+1)$ 個であるから、両端において各々、1 個ずつの境界条件が必要となる。

始端及び末端の境界条件式を F_0, F_{N+1} とする。以上から，時間 $j+1$ における未知変数 $h_1^{j+1}, \dots, h_{N+1}^{j+1}$ と $q_1^{j+1}, \dots, q_{N+1}^{j+1}$ (以後 $j+1$ を省略) に関する方程式は

$$\begin{aligned}
 &F_0(h_1, q_1) = 0 \\
 &F_1(h_1, q_1, h_2, q_2) = 0 \\
 &G_1(h_1, q_1, h_2, q_2) = 0 \\
 &\vdots \\
 &F_i(h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1}) = 0 \\
 &G_i(h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1}) = 0 \\
 &\vdots \\
 &F_N(h_N, q_N, h_{N+1}, q_{N+1}) = 0 \\
 &G_N(h_N, q_N, h_{N+1}, q_{N+1}) = 0 \\
 &F_{N+1}(h_{N+1}, q_{N+1}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{C-7}$$

上式の全体を $\mathbf{X} = (h_1, q_1, \dots, h_i, q_i, \dots, h_{N+1}, q_{N+1})$ として，

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \tag{C-8}$$

としよう。 \mathbf{X} に関する代数方程式であるから，ニュートンラフソン法で解く。ニュートンラフソン法でのくり返しステップを k として，

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^k)}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \tag{C-9}$$

として解 \mathbf{X} を求める。なお、 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ の形式から明らかにセクション間は隣り合っているから、ヤコビ行列は帯行列となる。

境界条件あるいは、中間の条件を表わすのは、四点インプリシット法では他の数値解析法と比べて容易である。各条件の例を次にあげる。

(i) 始端にあるポンプ

$$F_0(h_1, q_1) = h_1 - (a_0 + a_1 q_1 + a_2 q_1^2) = 0 \quad (\text{C-10})$$

上式は通常、運転時の性能曲線から得られる。

(ii) 末端にあるバルブ

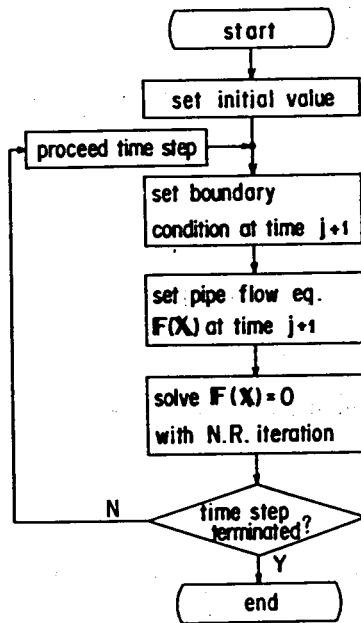
$$F_{N+1}(h_{N+1}, q_{N+1}) = q_{N+1} - K_v \sqrt{h_{N+1}} = 0 \quad (\text{C-11})$$

定数 K_v は、弁の開度に対応した係数である。

(iii) 中間点の管路の漏洩

セクション i で漏洩が発生したとき、

$$\left. \begin{aligned} F_i(h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1}) &= q_i - q_{i+1} - K_i (h_i - z_i)^{1.15} = 0 \\ G_i(h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1}) &= h_i - h_{i+1} = 0 \end{aligned} \right\} (\text{C-12})$$



第 C.3 図 四点インプリシット法のフローチャート

で、(C-7)式の i 番目の式を置きかえる。

以上の定式化によって、双曲型偏微分方程式 (C-3) 及び (C-4) 式は、各時間ステップにおいて求めるべき次の時間ステップの未知変数を陰に含む非線形代数方程式に差分近似された。数値計算のフローチャートを C-3 図に示す。初期値を設定した後、各時間ステップ毎に境界条件及び外的条件を与えて非線形代数方程式化し、ニュートンラフソン法によって解を求める。時間ステップの終端時刻迄、これを繰返す。

四点インプリシット法は、各時刻毎に厳密な解を求めるので、誤差が集積しないこと、四点の格子による差分化であるため、境界条件の定式化が容易であるなどの特徴があり、これまで適用されなかった管路非定常流（圧縮性流体）に対しても適していることが明らかとなった。